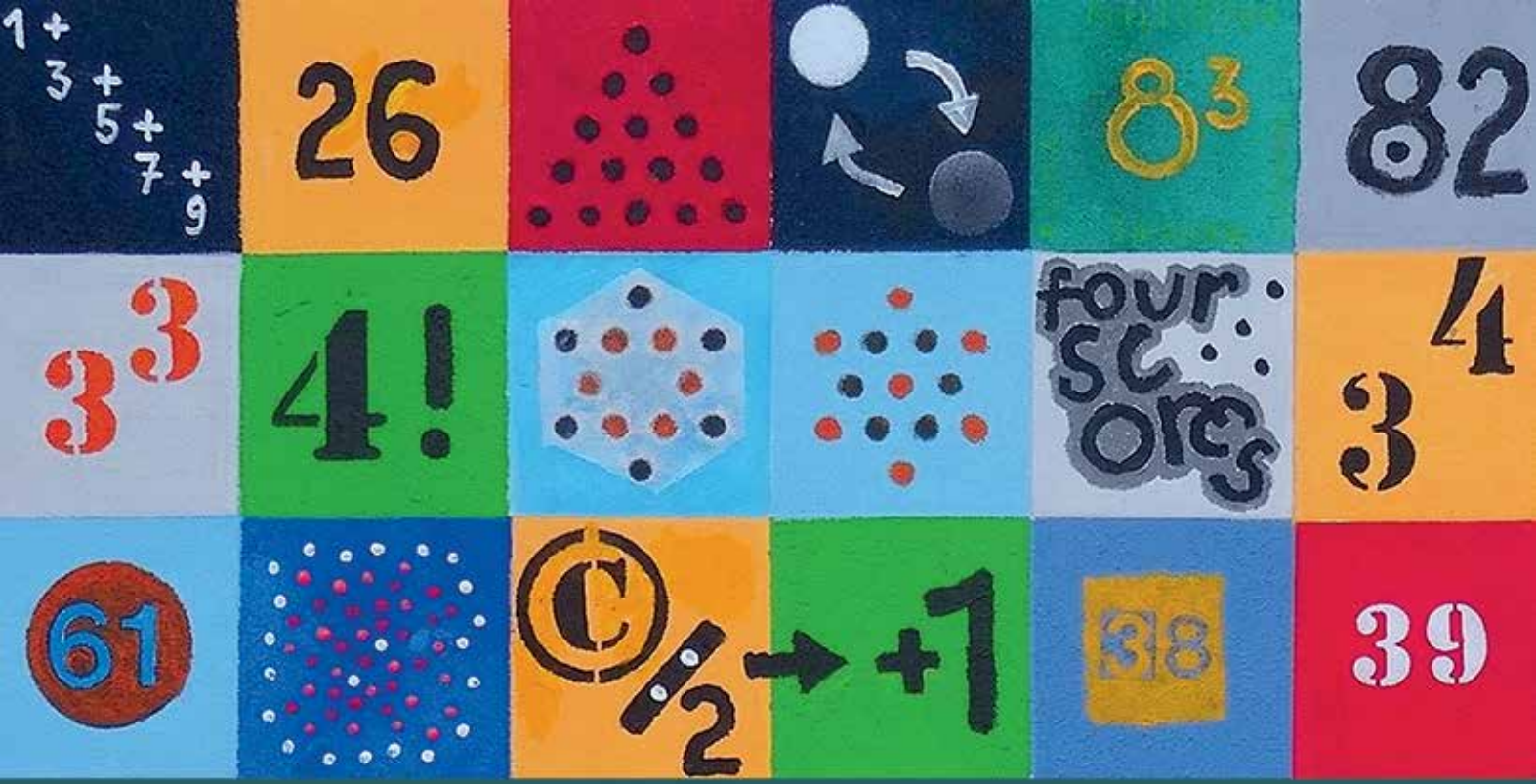


Peter Baptist, Eugen Jost

«Πάντα κατ' Αριθμόν γίγνονται»

Peter Baptist, Eugen Jost

„Πάντα κατ' Αριθμόν γίγνονται"

Παλλήνη 2018
Τίτλος: «ΠΑΝΤΑ ΚΑΤ' ΑΡΙΘΜΟΝ ΓΙΓΝΟΝΤΑΙ»

Κείμενα: Peter Baptist
Bayreuth, Γερμανία

Πίνακες: Eugen Jost
Thun, Ελβετία

Σχεδιασμός: Άννα Μαυροειδή
Ελληνογερμανική Αγωγή

Υποστηρίζεται από το ευρωπαϊκό έργο
CREATIONS http://creations-project.eu/

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου του βιβλίου με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη άδεια του εκδότη. Νόμος 2121/1993 και κανόνες του Διεθνούς Δικαίου που ισχύουν στην Ελλάδα.

Κέντρο για την Εκπαίδευση στις Επιστήμες και τα Μαθηματικά Πανεπιστήμιο του Bayreuth

Το Κέντρο για την Εκπαίδευση στις Επιστήμες και τα Μαθηματικά του Πανεπιστημίου του Bayreuth έχει ως στόχο την επιμόρφωση εν ενεργεία εκπαιδευτικών σε καινοτόμους εκπαιδευτικές μεθοδολογίες. Η έρευνα που πραγματοποιείται στο Κέντρο εστιάζεται στην αξιολόγηση της επίδρασης των καινοτόμων αυτών μεθοδολογιών στο εκπαιδευτικό έργο και στα εκπαιδευτικά αποτελέσματα σε μαθητές. Στο πλαίσιο των ερευνητικών του δραστηριοτήτων συνεργάζεται πολύ συχνά με σχολικές μονάδες, δίνοντας ιδιαίτερη σημασία στη διδασκαλία μέσω του ανακαλυπτικού μοντέλου και στην καταγραφή της ανάπτυξης της δημιουργικής και κριτικής σκέψης αλλά και στην καλλιέργεια δεξιοτήτων για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Ο καθηγητής Peter Baptist είναι ακαδημαϊκός σύμβουλος του μεγαλύτερου Σχολικού Δικτύου Αριστείας στην Επιστήμη και στα Μαθηματικά στη Γερμανία (MINT-EC). Οι ερευνητές του Κέντρου αναζητούν πρωτότυπους και δημιουργικούς τρόπους αλληλεπίδρασης με τους εκπαιδευτικούς, τους μαθητές αλλά και το ευρύ κοινό. Η έκθεση «Πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται» είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης και της στενής συνεργασίας με τον Ελβετό καλλιτέχνη Eugen Jost στο πλαίσιο της προσπάθειας προβολής των μαθηματικών στο ευρύ κοινό. Τα μαθηματικά προβάλλονται ως τρόπος σκέψης που χαρακτηρίζεται από τάξη και εσωτερική συνοχή, ως γλώσσα που χρησιμοποιεί με συνέπεια όρους και σύμβολα και ως εργαλείο εν τέλει που βοηθά να εξηγηθεί ο κόσμος γύρω μας.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (Ε.Μ.Ε.) είναι ένα από τα αρχαιότερα επιστημονικά σωματεία στην Ελλάδα, μη κερδοσκοπικού χαρακτήρα, που ιδρύθηκε στις 8 Απριλίου 1918 και φέτος συμπληρώνει 100 χρόνια ενεργού επιστημονικής δράσης. Το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων προς τιμήν της Ε.Μ.Ε. ανακήρυξε το 2018 ως Έτος Μαθηματικών με δύο κύριους στόχους:

- Να προβληθεί και να αναδειχθεί η σημασία των μαθηματικών και ο ρόλος τους στη δημιουργία και την ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.
- Να ενισχυθεί το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, την ιστορία και τη διδασκαλία τους.

Σκοπός της Ε.Μ.Ε. είναι η προαγωγή και η διάδοση των διαφόρων κλάδων της μαθηματικής επιστήμης, η οποία πραγματώνεται μέσα από μια σειρά στόχων που γενικά είναι οι εξής:

- Η πρόοδος της επιστήμης των μαθηματικών
- Η ανάπτυξη της ελεύθερης ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ των καθηγητών μαθηματικών, των επιστημόνων και της κοινωνίας
- Η ανάπτυξη και η συντήρηση της επιστημονικής ακεραιότητας και η βελτίωση των δυνατοτήτων των μελών της
- Η συνεχής βελτίωση της μαθηματικής αλλά και η πρόοδος της γενικής εκπαίδευσης
- Η προσέγγιση του Έλληνα μαθηματικού, η ενημέρωσή του για την πρόοδο της επιστήμης και της τεχνολογίας και η προσφορά πρακτικής βοήθειας σε θέματα που τον αφορούν κατά τη διάρκεια της ακαδημαϊκής, εκπαιδευτικής και διδακτικής εργασίας του.

Στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων που επιλέγει η Ε.Μ.Ε. για την υλοποίηση των παραπάνω στόχων περιλαμβάνεται η έκδοση περιοδικών εντύπων, η πραγματοποίηση διαλέξεων, η διεξαγωγή σεμιναρίων, η οργάνωση συνεδρίων, η ίδρυση παραρτημάτων στις πρωτεύουσες των νομών της χώρας. Μία τέτοια σημαντική δράση, η οποία εντάσσεται επίσης στο πλαίσιο του εορτασμού των 100 χρόνων της Ε.Μ.Ε. αλλά και του Έτους Μαθηματικών είναι και η διοργάνωση της έκθεσης έργων του Ελβετού καλλιτέχνη Eugen Jost «Πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται» με πηγή έμπνευσης τα μαθηματικά. Η Ε.Μ.Ε με χαρά συμμετέχει στην παρουσίαση της έκθεσης στο ελληνικό κοινό. Η έκθεση διαθέτει και 16 έργα που δημιουργήθηκαν ειδικά, για να αναδείξουν τις βάσεις της μαθηματικής σκέψης που αναπτύχθηκε στην αρχαία Ελλάδα.

ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΑΓΩΓΗ

Ελληνογερμανική Αγωγή

Η Ελληνογερμανική Αγωγή είναι ένα σύγχρονο ευρωπαϊκό εκπαιδευτήριο με όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. Η καλλιέργεια δεξιοτήτων των μαθητών μέσα από πολύπλευρες παιδαγωγικές δράσεις είναι μία από τις προτεραιότητες του εκπαιδευτικού προγράμματος. Στο σχολείο λειτουργεί ήδη από το 1994 Τμήμα Έρευνας και Ανάπτυξης. Οι ερευνητές του τμήματος σε συνεργασία με τους εκπαιδευτικούς του σχολείου εργάζονται στον σχεδιασμό και την ανάπτυξη καινοτόμων μεθόδων, εργαλείων και εκπαιδευτικών πρακτικών. Βασική επιδίωξη είναι η αξιοποίηση των τεχνολογιών αιχμής στην εκπαιδευτική διαδικασία με στόχο την αναβάθμιση του μαθήματος. Τα εργαλεία, τα οποία αναπτύσσονται στο πλαίσιο των εκπαιδευτικών προγραμμάτων είναι αποτέλεσμα συνεργατικής προσπάθειας ειδικών από τον χώρο της Πληροφορικής, της Τεχνολογίας, της Παιδαγωγικής, της Διδακτικής και της Ψυχολογίας. Η Ελληνογερμανική Αγωγή συνεργάζεται με πανεπιστημιακά ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα στην Ελλάδα, την Ευρώπη, την Αμερική, την Αυστραλία και την Ιαπωνία. Επίσης, συνεργάζεται με δεκάδες σχολεία σε ολόκληρο τον κόσμο ανταλλάσσοντας συνεχώς καλές πρακτικές και εμπειρίες. Είναι μάλιστα το μοναδικό σχολείο μέλος του Σχολικού Δικτύου Αριστείας στην Επιστήμη και τα Μαθηματικά (MINT-EC) εκτός γερμανικών συνόρων. Η Ελληνογερμανική Αγωγή χαρακτηρίζεται για το πολύπλευρο πρόγραμμά της. Σημαντικό ρόλο στη ζωή του σχολείου έχουν και οι πολιτιστικές εκδηλώσεις, μέσω των οποίων επιδιώκεται η ανάπτυξη της πρωτοβουλίας, η καλλιέργεια της ευαισθησίας καθώς και των ιδιαίτερων κλίσεων και δεξιοτήτων των μαθητών. Προσφέρεται υψηλή αισθητική παιδεία στους αυριανούς πολίτες με τη διοργάνωση εκθέσεων έργων τέχνης, συνεδρίων, διαλέξεων, συζητήσεων με προσωπικότητες των γραμμάτων και των τεχνών. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και η διοργάνωση της έκθεσης «Πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται» του Eugen Jost και Peter Baptist, που συνδυάζει πρωτότυπα και συνδέει δημιουργικά την επιστήμη και την τέχνη. Με τη βοήθεια των έργων τέχνης του Jost διδάσκονται και αναλύονται σύνθετες μαθηματικές έννοιες. Με τον τρόπο αυτό η τέχνη τίθεται στην υπηρεσία της διδασκαλίας και ένα εικαστικό γεγονός αποτελεί την αφορμή για μία πρωτότυπη εκπαιδευτική δράση.

Η ιστορία πίσω από την έκθεση

Οι πίνακες του Eugen Jost έχουν τίτλους, όπως «Hardy's Taxi III», «A Taste of Pi», «Good Luck», «Blue Stars» και «Prime Time». Στην πραγματικότητα, το στυλ τους είναι διαφορετικό, αλλά όλοι κινούνται γύρω από ένα κοινό πλαίσιο που κανείς δεν περιμένει διαβάζοντας τους τίτλους, τα μαθηματικά.

Οι πίνακες διηγούνται ιστορίες, εγείρουν το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά αποτελέσματα και τις σχέσεις, όπως ακριβώς και για τα άτομα που εμπλέκονται σε αυτά τα θέματα. Οι μαθηματικές θεωρίες και τα προβλήματα δεν έχουν να κάνουν μόνο με τον νου, αλλά επηρεάζουν επίσης τις ευαισθησίες και τα συναισθήματα σχετικά με την αισθητική, όπως και οι καλλιτεχνικές δραστηριότητες. Ο διάσημος Βρετανός θεωρητικός των αριθμών, Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947) επεσήμανε: *«Ο μαθηματικός, όπως και ο ζωγράφος ή ο ποιητής, φτιάχνει μοτίβα. Τα μοτίβα του μαθηματικού είναι πιο μόνιμα από αυτά του ζωγράφου ή του ποιητή, διότι φτιάχνονται με ιδέες»*. Οι πίνακες του Eugen Jost πείθουν λόγω της ποικιλομορφίας τους. Περιέχουν βασικά και πιο σύνθετα προβλήματα, προσελκύουν παιδιά, μαθητές και ενήλικες με ή και χωρίς μαθηματικό υπόβαθρο.

Συχνά εξισώνουμε τα μαθηματικά με την αριθμητική και εστιάζουμε στις υπολογιστικές δεξιότητες, αλλά τα μαθηματικά είναι κάτι παραπάνω. Οι πίνακες της έκθεσης που περιλαμβάνονται και σε αυτό το φυλλάδιο δείχνουν ξεκάθαρα ότι τα μαθηματικά είναι η μελέτη μοτίβων και σχέσεων, ένας τρόπος σκέψης και μια επιστήμη που χαρακτηρίζεται από τάξη και εσωτερική συνοχή, μια γλώσσα που χρησιμοποιεί όρους και σύμβολα που έχουν οριστεί με προσοχή, ένα εργαλείο που μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τον κόσμο.

Στην αρχή υπήρχε ένα ημερολόγιο για το έτος 2008, που συνδύαζε μαθηματικά και τέχνες. Ο Eugen Jost δημιούργησε πίνακες χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοτίβα ή αναφορές στα μαθηματικά, ειδικά γι' αυτόν τον σκοπό. Για περαιτέρω μαθηματικές πληροφορίες υπήρχαν επεξηγηματικά κείμενα στην πίσω πλευρά κάθε σελίδας του ημερολογίου.

Το ημερολόγιο είχε επιτυχία για πολύ καιρό. Είχε γίνει πραγματικά ανάρπαστο. Ακολούθησαν δύο ακόμα ημερολόγια και βιβλία μαθηματικών και τέχνης. Προέκυψαν δεκάδες εκθέσεις πρωτότυπων έργων ζωγραφικής και πολύ περισσότερες ψηφιακές εκτυπώσεις των έργων. Η ιδέα της προσέγγισης των μαθηματικών

μέσα από έργα τέχνης εξακολουθεί να είναι ζωντανή και δημοφιλής. Το ενδιαφέρον για την έκθεσή μας συνεχίζει να είναι αμείωτο.

Για την παρούσα έκθεση στην Αθήνα, ο Eugen Jost έχει δημιουργήσει σημαντικό αριθμό νέων έργων ζωγραφικής. Τα κείμενα του Peter Baptist παρέχουν πληροφορίες, συμβουλές, παρατηρήσεις και ερωτήσεις, για να ενθαρρύνουν τον προβληματισμό σχετικά με τα μαθηματικά.

Δείτε τους πίνακες, ανακαλύψτε μοτίβα, σχήματα και σχέσεις. Απολαύστε την έκθεση και την ομορφιά των μαθηματικών. Δείξτε περιέργεια για μια αρχικά άγνωστη αλλά πραγματικά ενδιαφέρουσα προσέγγιση απέναντι στα μαθηματικά και την ιστορία των μαθηματικών. Η τέχνη μάς βοηθά να δείξουμε ότι τα μαθηματικά είναι κάτι πολύ περισσότερο από απλούς υπολογισμούς, τα μαθηματικά αποτελούν μέρος του πολιτισμού μας.

Το ταξίτου Hardy III

9 16 25
Joh 21, 11
153
$e^{i\pi}+1=0$
e+k-f=2
jost
MMXVII

Το ταξί του Hardy III

«Ο μαθηματικός, όπως και ο ζωγράφος ή ο ποιητής, φτιάχνει μοτίβα. Τα μοτίβα του μαθηματικού είναι πιο μόνιμα από αυτά του ζωγράφου ή του ποιητή, διότι φτιάχνονται με ιδέες.» ... Τα μοτίβα του μαθηματικού, όπως και του ζωγράφου ή του ποιητή θα πρέπει να είναι όμορφα. Οι ιδέες, όπως και τα χρώματα ή οι λέξεις, θα πρέπει να συνδυάζονται με αρμονικό τρόπο. Η ομορφιά είναι το πρώτο κριτήριο: δεν υπάρχει μόνιμη θέση σ' αυτόν τον κόσμο για άσχημα μαθηματικά. ...

- Πρόκειται για τα λόγια του Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947), εξέχοντα και εκκεντρικού μαθηματικού στο Cambridge.

- Πολλοί μαθηματικοί αντλούν αισθητική απόλαυση από την εργασία τους. Περιγράφουν τα μαθηματικά, όπως ο Hardy, ως μια δημιουργική δραστηριότητα και μια μορφή τέχνης. Γίνονται συγκρίσεις με τη ζωγραφική, τη μουσική και την ποίηση. Για τον Eugen Jost, τα μαθηματικά είναι ένας τεράστιος κήπος με λουλούδια και μέσα από τους πίνακές του μας κάνει να ανακαλύπτουμε τα πιο όμορφα λουλούδια.

- Το πρώτο μας λουλούδι είναι ο αριθμός 1729. Ένα ταξί με αυτές τις πινακίδες πήγε τον Hardy στο νοσοκομείο, για να επισκεφθεί τον άρρωστο συνάδελφό του, Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920).

- Ο Ramanujan ήταν αυτοδίδακτος Ινδός μαθηματικός και ιδιοφυΐα. Ο Hardy αναγνώρισε το έξοχο έργο του και του ζήτησε να έρθει στο Cambridge.

- Για τον Hardy, το 1729 ήταν ένας βαρετός αριθμός, αλλά ο Ramanujan είδε αμέσως ότι ήταν ένας πολύ ιδιαίτερος αριθμός. Το 1729 είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δύο κύβων με δύο διαφορετικούς τρόπους ($1729 = 9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$).

- Παρεμπιπτόντως, το άθροισμα των ψηφίων του 1729 είναι διαιρέτης του 1729. Γνωρίζετε άλλους αριθμούς που να έχουν αυτήν την ιδιότητα; Άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτού του «αριθμού του ταξί»: πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των ψηφίων του (1+7+2+9) με τον παλίνδρομό του 91, το αποτέλεσμα είναι 1729!

- Ένα μαγικό τετράγωνο 3x3 σχηματίζεται στο φόντο του πίνακα ζωγραφικής. Φαίνεται πολύ αχνά. Υπάρχει άλλο ένα κάτω δεξιά. Τα κελιά του γεμίζονται με αριθμητικά ψηφία, μοτίβα κουκκίδων και ένα ερωτηματικό.

- Ως φόρο τιμής στον Πυθαγόρα, έχουμε την τριάδα 3,4,5, τα τετράγωνά τους και τη γενίκευση.

- Συμπληρωματικοί αριθμοί-λουλούδια είναι
  - Οι τετράγωνοι αριθμοί
  - Οι τριγωνικοί αριθμοί
  - Οι αριθμοί Φιμπονάτσι
  - Οι πρώτοι αριθμοί
  - Ο αριθμός π
  - Ο αριθμός του Euler e

- Ο e είναι η αριθμητική τιμή της άπειρης σειράς $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

- Άλλη άπειρη σειρά με πεπερασμένη αριθμητική τιμή είναι η

  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$

  Αυτό το άθροισμα έχει προβληματίσει τους μαθηματικούς επί πολύ καιρό. Το 1736 ο Leonhard Euler απέδειξε ότι η τιμή αυτού του αθροίσματος των αντίστροφων των τετραγώνων των θετικών ακέραιων αριθμών ισούται με $\frac{\pi^2}{6}$.

- Το όνομα του Euler συνδέεται επίσης με τις γέφυρες της πόλης Königsberg. Ο ποταμός Πρέγκελ χωρίζει αυτήν την πρώην πόλη της Πρωσίας σε αρκετά κομμάτια που συνδέονται με επτά γέφυρες. Το ενδιαφέρον του Euler κέντρισε το ερώτημα εάν κάποια διαδρομή της πόλης μπορούσε να διασχίζει κάθε μία από τις επτά γέφυρες ακριβώς μία φορά. Η αρνητική του απάντηση έθεσε τα θεμέλια για τη θεωρία των γραφημάτων.

- Ένας αξιοσημείωτος τύπος στα μαθηματικά είναι η ταυτότητα του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$. Αυτή η εξίσωση που έχει αποδειχθεί από τον Euler συνδυάζει τις σημαντικές μαθηματικές σταθερές e, π, i (τη φανταστική μονάδα που λύνει την εξίσωση $i^2 = -1$).

- Συνεχίζουμε με τον Leonhard Euler. Ο τύπος του για τα πολύεδρα $V + F - E = 2$ αποδεικνύει τη σχέση μεταξύ των αριθμών των κορυφών (V), των εδρών (F) και των ακμών (E) των απλών πολύεδρων.

- Ένα παράδειγμα απλού πολύεδρου είναι ο κύβος. Δίπλα στον τύπο του πολύεδρου βλέπουμε το ανάπτυγμα ενός κύβου. Ξέρετε πόσα διαφορετικά αναπτύγματα κύβου υπάρχουν;

- Το σύμβολο της Πυθαγόρειας ταυτότητας είναι το πεντάγραμμο. Αυτό το σχήμα του πεντάκτινου αστεριού ανήκει στα μαθηματικά μας λουλούδια, όπως και το Άστρο του Δαβίδ. Σε σύγκριση με το πεντάγραμμο έχει μία επιπλέον κορυφή. Το εξάγραμμο μπορεί να θεωρηθεί ως η σύνθεση δύο ισόπλευρων τριγώνων.

- Ο αριθμός 153 μέσα στο σχέδιο ενός ψαριού αναφέρεται σε μια θαυματουργή ψαριά που καταγράφεται στη Βίβλο (Ευαγγέλιο του Ιωάννη 21,11). Μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί κάποια συμβολική σημασία του αριθμού 153. Οι φίλοι των μυστηρίων των αριθμών ενδέχεται να ενθουσιαστούν με την ακόλουθη ιδιότητα του αριθμού 153. Το άθροισμα των κύβων των ψηφίων αυτού του αριθμού ισούται με τον ακόλουθο αριθμό: $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$.

Οι αριθμοί στην καθημερινότητα και τον πολιτισμό μας

all good things come in threes
60
it takes two to tango
3/4
give me five
jost
6/8
cats are said to have 9 lives
on cloud nine
4/4
high five
cmyk
4711
08
15
a million miles away
1km ≙ 0.6214mi
3604
e2-e4
jan·mmxiii·
220V
50HZ

Οι αριθμοί στην καθημερινότητα και τον πολιτισμό μας

- **C M Y K** : Αυτός ο συνδυασμός γραμμάτων υπάρχει παντού, αλλά δεν είναι προφανής. Συναντάμε αυτήν τη σημειογραφία, όταν διαβάζουμε εφημερίδα το πρωί, όταν κοιτάμε την αλληλογραφία μας μέσα στην ημέρα ή όταν κάνουμε ζάπινγκ το βράδυ. Πολλές έγχρωμες φωτογραφίες βασίζονται στα βασικά χρώματα Κυανό, Φούξια και Κίτρινο [Cyan (C), Magenta (M), Yellow (Y)]. Ένα πλούσιο κόκκινο προκύπτει από τον χρωματικό συνδυασμό C: 0%, M: 100% και Y: 100%. Τα τρία βασικά χρώματα μαζί μάς κάνουν το μαύρο. Καθώς αυτός ο συνδυασμός δεν παράγει ένα πλούσιο μαύρο στην εκτύπωση, το μαύρο χρησιμοποιείται επίσης ως βασικό χρώμα.

- Το «**No. 5**» είναι το πρώτο άρωμα που λάνσαρε η Γαλλίδα σχεδιάστρια μόδας Gabrielle «Coco» Chanel (1883 - 1971). Ο χημικός τύπος για το άρωμα δημιουργήθηκε από τον Γαλλορώσο χημικό Ernest Beaux (1881 - 1961). Το «Chanel No. 5» είναι ίσως το πιο διάσημο άρωμα στον κόσμο.

- Το «**4711**» είναι μια κλασική γερμανική *Eau de Cologne* (κολόνια). Παράγεται στην Κολωνία τουλάχιστον από το 1799. Το πρώτο μικρό εργοστάσιο ήταν στην Glockengasse 4. Τα σπίτια στην Κολωνία απέκτησαν επίσης αρίθμηση και το εργοστάσιο αρωμάτων πήρε τον αριθμό 4711, το οποίο έγινε εμπορικό σήμα διεθνούς φήμης.

- Ο όρος **08/15** αναφέρεται σε ένα τυπικό πολυβόλο του γερμανικού στρατού. Κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου κατασκευάστηκε σε τόσο μεγάλες ποσότητες που έγινε η αργκό του στρατού για οτιδήποτε ήταν τυποποιημένο. Σήμερα αυτός ο όρος χρησιμοποιείται και στην καθημερινότητα.

- Τα κλάσματα **3/4**, **6/8** και **4/4** δηλώνουν το μέτρο στη μουσική. Για παράδειγμα, το βαλς είναι χορός με μέτρο 3/4. Η μουσική παρέλαση του ιππικού έχει συχνά μέτρο 6/8, που σημαίνει ότι έχουμε έξι όγδοα σε ένα μέτρο. Το τάνγκο είναι σε μέτρο 4/4. Από το 2009, αυτός ο χορός για δύο (βλ. στα αγγλικά «it takes two to tango») έχει συμπεριληφθεί στον κατάλογο της Άυλης Πολιτιστικής Κληρονομιάς της UNESCO.

- Οι Σουμέριοι στη νότια Μεσοποταμία είναι ένας από τους πρώτους γνωστούς πολιτισμούς στον κόσμο (τέλη 6ης χιλιετίας με αρχές 2ης χιλιετίας π.Χ.). Περίπου στα μέσα της 4ης χιλιετίας εφευρέθηκε η σφηνοειδής γραφή. Σφηνοειδής σημαίνει «σε σχήμα σφήνας», χάρη στην τριγωνική μύτη της γραφίδας που χρησιμοποιείται για την αποτύπωση συμβόλων σε υγρό πηλό. Δύο χαρακτήρες ήταν αρκετοί, για να αναπαραστήσουν όλους τους αριθμούς:

- Οι Μεσοποτάμιοι χρησιμοποιούσαν ένα εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης (με βάση το 60). Από εκεί προέκυψαν τα **60** λεπτά της ώρας, τα **3600** δευτερόλεπτα της ώρας και οι **24** ώρες της ημέρας. Κάθε έτος έχει **12** μήνες. Το ημερολόγιο των Σουμερίων μετρούσε επίσης εβδομάδες των **7** ημερών.

- Το σκάκι παίζεται σε τετράγωνη σκακιέρα με οκτώ σειρές (δηλώνονται με τους αριθμούς 1 έως 8) και οκτώ στήλες (δηλώνονται με τα γράμματα α έως η). Το **«ε2 - ε4»** σημαίνει ότι μετακινούμε ένα πιόνι από τη θέση ε2 στη θέση ε4.

- Δύο φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με το ηλεκτρικό ρεύμα, η τάση και η συχνότητα, διαφέρουν ανά περιοχή. Η τάση των **220 V** (volt) και η συχνότητα των **50 Hz** (hertz) χρησιμοποιούνται στην Ευρώπη και σε πολλά άλλα μέρη του κόσμου.

- Ο ταχυδρομικός κώδικας είναι μια σειρά από γράμματα ή ψηφία ή και τα δύο, η οποία συμπεριλαμβάνεται στις ταχυδρομικές διευθύνσεις για τη διαλογή της αλληλογραφίας. Η συντριπτική πλειονότητα των 190 κρατών μελών της Παγκόσμιας Ταχυδρομικής Ένωσης διαθέτει σύστημα ταχυδρομικών κωδικών. Το **3604** είναι ο ταχυδρομικός κώδικας της πατρίδας του Eugen Jost στην Ελβετία.

Ζώνη υψηλής τηλεθέασης

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 5
magicicada septendecim
73939133
7393913
739391
73939
7393
739
73
7
251
(6n-1) (6n+1)
5 7
11 13
17 19
29 31
41 43
11
jost
N² – N + 41
41, 43, 47, ... 1601
V. MMXIII
241
98 97
77 76 75 74 73 72 71 96
78 57 56 55 54 53 70 95
79 58 45 44 43 52 69 94
80 59 46 41 42 51 68 93
81 60 47 48 49 50 67 92
82 61 62 63 64 55 66 91
83 84 85 86 87 88 89 90
257
4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 5 + 3
10 = 7 + 3
12 = 7 + 5
14 = 3 + 11
16 = 3 + 13
57'885'761
77'232'917
2
-1
239
233
ων ταις γυναιξίν ουδ' ατιουν φωνης ενι;
127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 1
79 81 91 93 97 99 211 223 227 229 ...
96 97 101 103 107 109 113

Ζώνη υψηλής τηλεθέασης

- Ένα μοτίβο με κουκκίδες διασχίζει όλο τον πίνακα σαν φίδι. Οι μεμονωμένες κουκκίδες συμβολίζουν τους φυσικούς αριθμούς (θετικούς ακέραιους) σε αύξουσα σειρά. Οι πρώτοι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... δηλώνονται ιδιαίτερα με λευκές κουκκίδες.

- Πρώτος αριθμός ή πρώτος είναι ένας ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 1 που μπορεί να διαιρεθεί μόνο με τον εαυτό του και με το 1.

- Παρεμπιπτόντως, ο μεγαλύτερος γνωστός πρώτος αριθμός $2^{77\,232\,917}$- 1 (με ισχύ από τον Μάιο του 2018) έχει 23.249.425 ψηφία. Φυσικά, το φίδι με τους αριθμούς στον πίνακα είναι κάπως πιο «κοντό»! Ένας τέτοιος πρώτος αριθμός που έχει τη μορφή δύναμης του 2 μείον ένα λέγεται **Πρώτος Μερσέν**, από τον Marin Mersenne (1588 - 1648), που ανήκε στο Τάγμα των Ελάσσονων Αδελφών.

- Ο Mersenne υποστήριξε ότι οι αριθμοί 2^p - 1 ήταν πρώτοι για τους πρώτους 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 και 257. Ισχυριζόταν ότι έχει δοκιμάσει τον τύπο για όλους τους πρώτους που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 257. Μια πραγματικά δύσκολη εργασία για την εποχή του χωρίς αριθμομηχανές ή ακόμα και υπολογιστές. Καταφέραμε να ελέγξουμε πλήρως τη λίστα του Mersenne το 1947. Δεν ήταν απόλυτα ακριβής, διότι είχε αποκλείσει τους αριθμούς 61, 89, 107 και συμπεριέλαβε λανθασμένα το 67 και το 257. Δεν είναι γνωστό εάν ο αριθμός των Πρώτων Μερσέν είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

- Στη σημερινή εποχή θα χαρακτηρίζαμε τον Mersenne ως έναν εξαιρετικό networker. Ταξίδεψε εκτενώς στην Ευρώπη, όπου συναντούσε σε τακτική βάση μερικές από τις εξέχουσες προσωπικότητες της εποχής του στον τομέα των μαθηματικών (όπως ο Descartes, ο Desargues, ο Fermat, ο Pascal, ο Galileo, ο Huygens). Με αυτόν τον τρόπο κατάφερε να μεταδώσει τις μαθηματικές του γνώσεις. Σε μια εποχή όπου δεν υπήρχαν επιστημονικά περιοδικά, το ταχυδρομείο όπως το ξέρουμε, το τηλέφωνο ή το διαδίκτυο, η διάδοση των επιστημονικών αποτελεσμάτων ήταν ιδιαίτερα σημαντική δραστηριότητα.

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να αποτελείται από πρώτους αριθμούς. Αυτή η απεικόνιση είναι μοναδική εκτός από τη σειρά των διαιρετών. Για παράδειγμα, ο αριθμός 28 μπορεί να εκφραστεί ακριβώς με έναν τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών: 28 = 2*2*7. Συνεπώς, οι πρώτοι αριθμοί είναι γνωστοί ως τα δομικά στοιχεία των φυσικών αριθμών.

- Πριν από περισσότερα από 2300 χρόνια, ήταν ήδη γνωστό ότι υπάρχει άπειρος αριθμός πρώτων αριθμών. Απόδειξη αυτού υπάρχει στο διάσημο βιβλίο του Ευκλείδη (περίπου 300 π.Χ.).

- Μία υπόθεση και μόνο μπορεί να σε κάνει αθάνατο. Αυτό συνέβη με τον Christian Goldbach (1690 - 1764), ο οποίος αντάλλασσε επιστολές με τον Leonhard Euler (1707 - 1783), τον κορυφαίο μαθηματικό εκείνης της εποχής. Μετά από συνεχείς προσπάθειες και σφάλματα, ο **Goldbach** έκανε μια εκπληκτική παρατήρηση:
  Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 4 είναι το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών (μερικές φορές με περισσότερους από έναν τρόπους). Κάποια παραδείγματα: 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 = 5 + 5, ...

- Ο Goldbach δεν κατάφερε να αποδείξει την υπόθεσή του και έτσι έγραψε στον Euler. Μετά από τον θάνατο του Euler, η επιστολή βρέθηκε ανάμεσα στην τεράστια κληρονομιά του. Δεν γνωρίζουμε εάν ο Euler προσπάθησε να λύσει αυτό το πρόβλημα. Παρά τις πολυάριθμες προσπάθειες, η υπόθεση παραμένει χωρίς απόδειξη.

- Δεν έχει αποδειχθεί επίσης μέχρι σήμερα η υπόθεση ότι υπάρχει άπειρος αριθμός «δίδυμων» πρώτων αριθμών. Οι **δίδυμοι πρώτοι** είναι ένα ζεύγος πρώτων αριθμών με την ακόλουθη μορφή p, p+2: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19)...

- Υπάρχει μόνο ένας **«τρίδυμος»** πρώτος p, p+2, p+4, και συγκεκριμένα το 3, 5, 7.

- Μπορεί να τύχει να υπάρξουν μεγάλα **κενά μεταξύ διαδοχικών πρώτων**.

- Ως φοιτητής στη Βουδαπέστη το 1931, ο Paul Erdös (1913 - 1996) ανακάλυψε μια όμορφη στοιχειώδη απόδειξη, ότι υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένας πρώτος αριθμός μεταξύ ενός ακεραίου ή μεγαλύτερου του 1 και του διπλάσιού του, 2n. Ο Erdös ήταν ένας από τους πιο παραγωγικούς μαθηματικούς του 20ού αιώνα. Ήταν γνωστός τόσο για την κοινωνική του πρακτική στα μαθηματικά, όσο και για τον εκκεντρικό τρόπο ζωής του.

- Το **Κόσκινο του Ερατοσθένη** είναι ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για την εύρεση όλων των μικρών πρώτων αριθμών (π.χ. των μικρότερων από 1.000.000). Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος (περίπου 276 π.Χ. - περίπου 195 π.Χ.) ήταν Έλληνας επιστήμονας που τον ενδιέφεραν πολλοί τομείς.
  Θεωρείται ιδρυτής του κλάδου της γεωγραφίας και ήταν επίσης ο διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας.

- Υπάρχουν επίσης πρώτοι αριθμοί με πολύ ιδιαίτερες ιδιότητες. Για παράδειγμα, πρώτοι αριθμοί που παραμένουν πρώτοι, όταν το τελευταίο (από δεξιά) ψηφίο αφαιρείται διαδοχικά. Ο μεγαλύτερος είναι ο οκταψήφιος αριθμός **73939133**.

- Ακόμα και τα τζιτζίκια γνωρίζουν τουλάχιστον έναν πρώτο αριθμό, όπως μαθαίνουμε από τον Thomas Jefferson (1743 - 1826), τον βασικό συγγραφέα της Διακήρυξης της Ανεξαρτησίας και τρίτο Πρόεδρο των Ηνωμένων Πολιτειών. Το 1775, κατέγραψε στο «Βιβλίο Κήπου» του την 17ετή περιοδικότητα ενός ιδιαίτερου είδους ακρίδας, της **Magicicada septendecim**. Εκείνη τη χρονιά, τα τζιτζίκια είχαν βγει ξανά από το έδαφος στην οικία του στο Monticello.

- Σκεφτείτε ένα ορθογώνιο πλέγμα. Ξεκινούμε από το κεντρικό σημείο στο 41 και τοποθετούμε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους κατά σπειροειδή τρόπο (αριστερόστροφα). Στη διαγώνιο βρίσκουμε τους πρώτους που προκύπτουν από το πολυώνυμο $n^2 + n + 41$. Αυτό το πολυώνυμο προσφέρει μια συνεχή ακολουθία πρώτων αριθμών για $n = 0$ έως 39. Αυτό το είδος γραφικής απεικόνισης πρώτων αριθμών σχεδιάστηκε από τον Stanislaw **Ulam** (1909 - 1984).

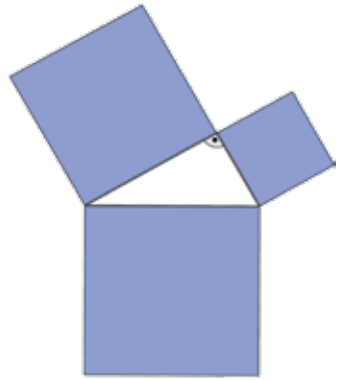
- *Υπάρχουν δύο δεδομένα σχετικά με την κατανομή των πρώτων αριθμών: Το πρώτο είναι ότι παρά τον απλό ορισμό και ρόλο τους ως δομικά στοιχεία των φυσικών αριθμών, οι πρώτοι αριθμοί είναι τα πιο αυθαίρετα, άτακτα πράγματα που μελετούν οι μαθηματικοί. Μεγαλώνουν σαν τα ζιζάνια μεταξύ των φυσικών αριθμών και φαίνεται να μην υπακούουν σε κανέναν άλλο νόμο πέρα από εκείνον της τύχης, και κανείς δεν μπορεί να προβλέψει πού θα εμφανιστεί ξανά ο επόμενος ή να δει αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή όχι. Το δεύτερο είναι ακόμα πιο εκπληκτικό, γιατί δηλώνει ακριβώς το αντίθετο: ότι οι πρώτοι αριθμοί παρουσιάζουν εκπληκτική κανονικότητα, ότι υπάρχουν νόμοι που καθορίζουν τη συμπεριφορά τους και ότι υπακούουν σε αυτούς τους νόμους σχεδόν με στρατιωτική ακρίβεια.»* (Don Zagier, εναρκτήρια διάλεξη, Βόννη 1975).

«Κρυμμένος» Πυθαγόρας Ι

Κρυμμένος Πυθαγόρας Ι

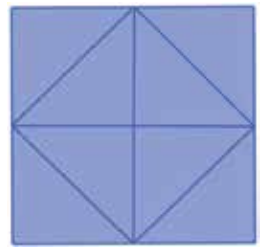
- Αν είστε λίγο εξοικειωμένοι με τις βασικές έννοιες γεωμετρίας και σκεφτείτε το Πυθαγόρειο θεώρημα, συνήθως έχετε στο μυαλό σας το εξής:

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο
το άθροισμα των τετραγώνων
των κάθετων πλευρών
ισούται με το τετράγωνο
της υποτείνουσας.

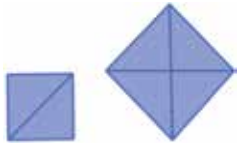


(Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται υποτείνουσα. Οι άλλες δύο πλευρές ονομάζονται κάθετοι).

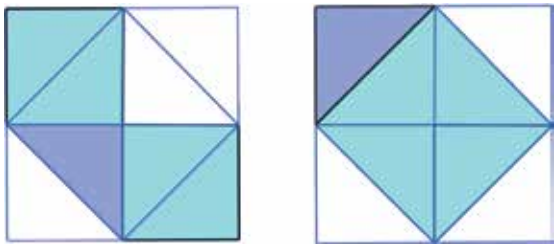
- Ο πίνακας του Eugen Jost φαίνεται εντελώς διαφορετικός σε σχέση με την παραπάνω διάταξη. Βλέπουμε ένα τετράγωνο, το οποίο αποτελείται από οκτώ ίσα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα.



Πού είναι ο «Πυθαγόρας»; Προσπαθούμε να βρούμε τι σχέση έχει αυτό το σχήμα με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Είναι λίγο περίπλοκο. Δύο ή τέσσερα από αυτά τα τρίγωνα σχηματίζουν τετράγωνα, με το πρώτο να έχει το μισό εμβαδόν του δεύτερου.



Οι πλευρές τους αντιστοιχούν στις καθέτους και στην υποτείνουσα του ορθού τριγώνου, αντίστοιχα. Αυτό το περίπλοκο σχήμα, λοιπόν, αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση Πυθαγόρειου θεωρήματος, ενώ ταυτόχρονα παρέχει μια περιγραφική απόδειξη.

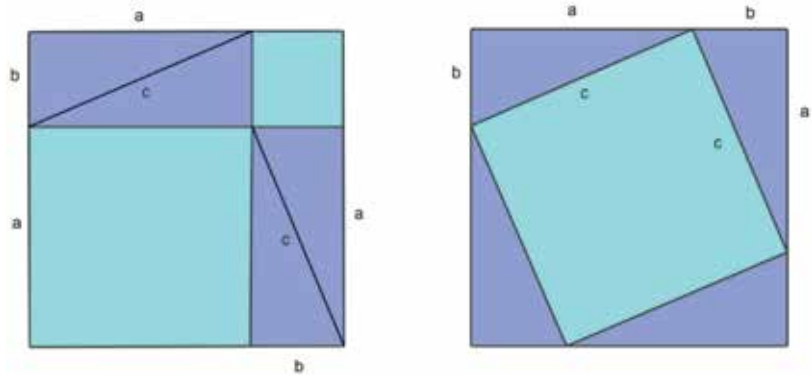


► Ας δούμε τώρα τη γενική περίπτωση. Το Πυθαγόρειο θεώρημα λέει ότι (στην αλγεβρική του μορφή):

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με καθέτους μήκους a, b και υποτείνουσα μήκους c ισχύει:

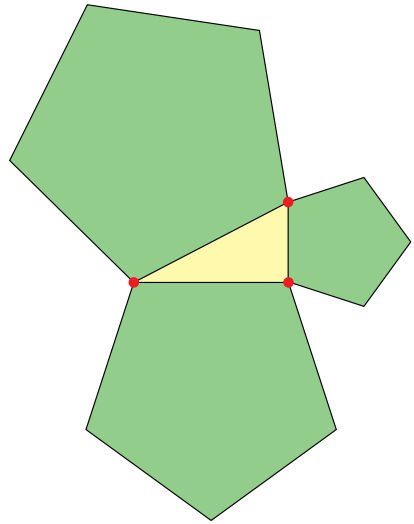
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Τοποθετούμε τέσσερα πανομοιότυπα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές μήκους a, b, και c σε ένα μεγάλο τετράγωνο με μήκος πλευράς a + b, αφήνοντας δύο τετράγωνους χώρους με πλευρές a και b, αντίστοιχα (σχήμα κάτω αριστερά). Τα τέσσερα τρίγωνα μπορούν επίσης να τοποθετηθούν στο μεγάλο τετράγωνο με μήκος πλευράς a + b, έτσι ώστε να μείνει ένα κεντρικό τετράπλευρο με ίσες πλευρές μήκους c (σχήμα κάτω δεξιά). Εξηγήστε γιατί αυτό το τετράπλευρο είναι τετράγωνο!



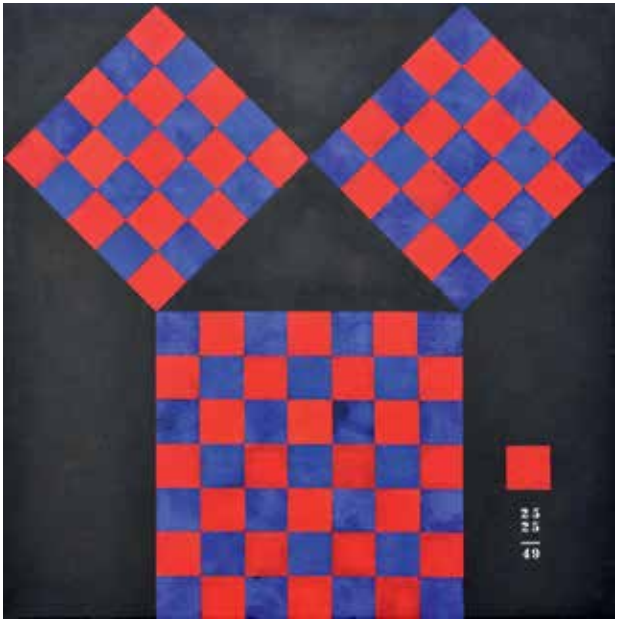
Και στις δύο περιπτώσεις τα τετράγωνα που σχηματίζονται ισούνται με το μεγάλο τετράγωνο μείον τέσσερις φορές το τρίγωνο. Έτσι το άθροισμα των δύο μικρότερων τετραγώνων $a^2 + b^2$ ισούται με το μεγαλύτερο τετράγωνο c^2.

- Στο έργο του *Στοιχεία* ο Ευκλείδης γενικεύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Σχεδιάζουμε οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα με τη βάση του να ισούται με μία από τις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου. Έπειτα σχεδιάζουμε όμοια σχήματα με βάσεις που ισούνται με τις άλλες δύο πλευρές. Εξακολουθεί να ισχύει ότι το σχήμα στην υποτείνουσα έχει ίδιο εμβαδόν με το άθροισμα των εμβαδών των άλλων δύο σχημάτων.



- Ο επόμενος πίνακας δείχνει για ακόμα μία φορά μια ιδιαίτερη περίπτωση Πυθαγόρειου θεωρήματος. Και πάλι εξετάζουμε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Τα τετράγωνα στις πλευρές του τριγώνου αποτελούνται από ίσα μικρότερα τετράγωνα. Μπορούμε να προσδιορίσουμε το εμβαδόν των τριών τετραγώνων υπολογίζοντας τα μικρά εσωτερικά τετράγωνα. Για τα τετράγωνα στις καθέτους έχουμε 25 μικρά τετράγωνα στο καθένα, ενώ για το τετράγωνο στην υποτείνουσα έχουμε 49 εσωτερικά τετράγωνα.

25 + 25 = 49



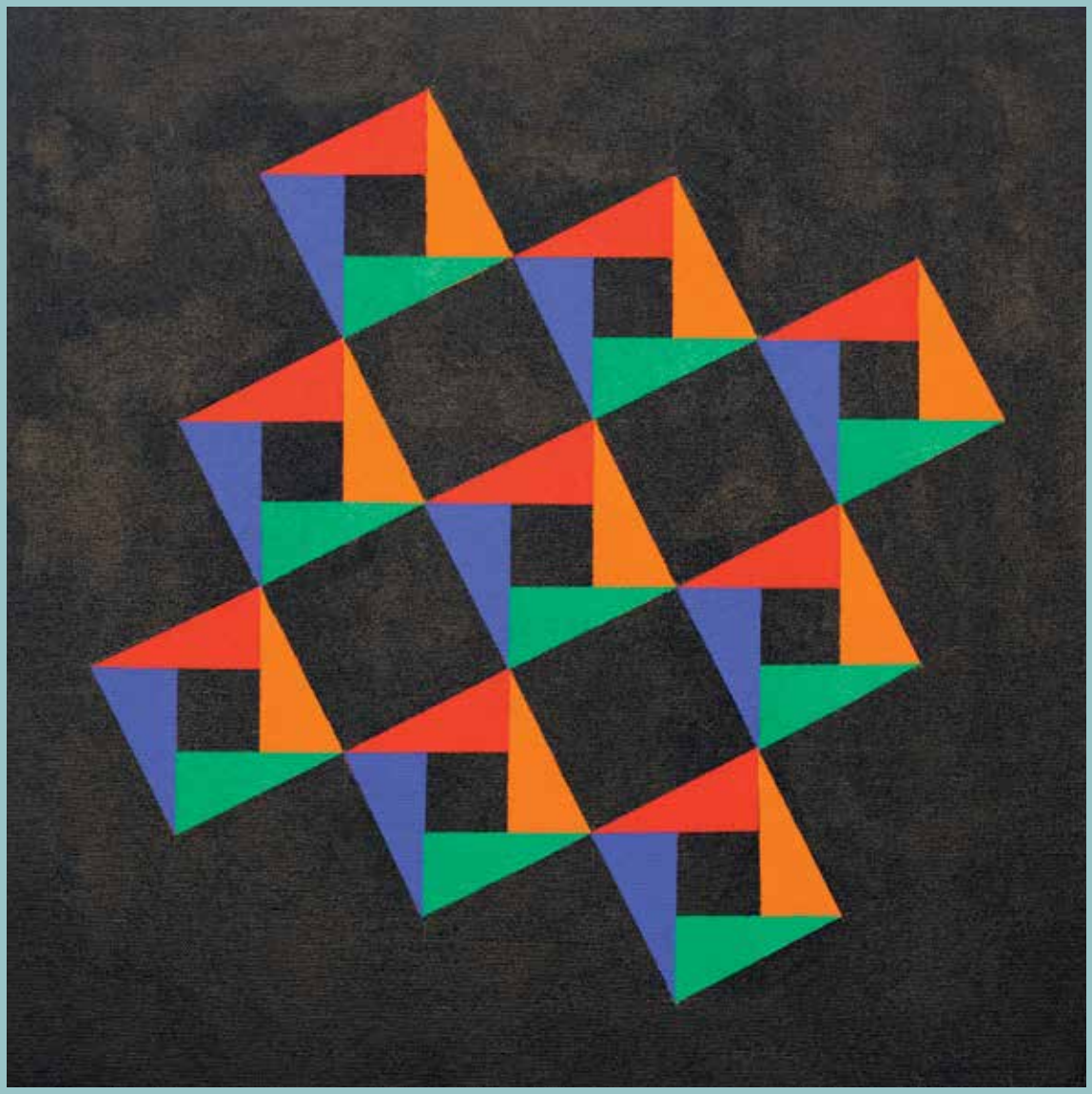
Κάτι περίεργο φαίνεται να συμβαίνει. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε την εξίσωση

$$5^2 + 5^2 = 7^2 \text{ ή } 25 + 25 = 49.$$

Πρόκειται για οπτική ψευδαίσθηση; Μπορούμε να εξηγήσουμε αυτό το μυστηριώδες αποτέλεσμα;

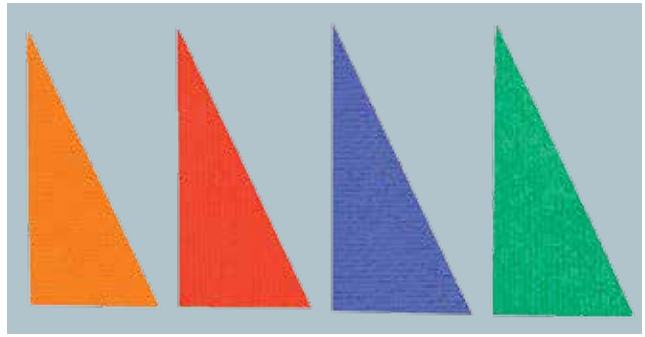
«Κρυμμένος» Πυθαγόρας II

(Le Quattro stagioni)

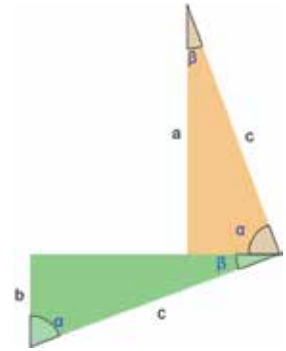


Le Quattro stagioni

- Τέσσερις εποχές, τέσσερα χρώματα, τέσσερα ίσα τρίγωνα, ξανά περίπλοκος Πυθαγόρας.

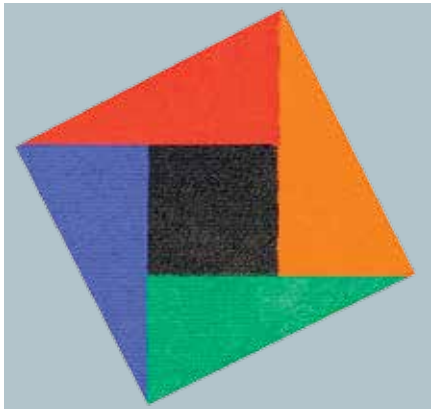


- Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει καθέτους μήκους a και b (a>b) και υποτείνουσα μήκους c. Το άθροισμα των μετρήσεων των γωνιών σε κάθε τρίγωνο είναι 180°. Αν η μία γωνία ισούται με 90°, τότε οι άλλες δύο συμπληρώνουν μαζί άλλη μία ορθή γωνία.



Τοποθετώντας δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα, έτσι ώστε οι διαφορετικές μη ορθές γωνίες τους να συναντιούνται σε μια κορυφή, στην κορυφή αυτή σχηματίζεται μια ορθή γωνία. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην παρακάτω απόδειξη.

- Η απόδειξη βασίζεται στο διάγραμμα από τον πίνακα του Jost.



μικρό (εσωτερικό) τετράγωνο + 4 * τρίγωνο = μεγάλο τετράγωνο

$$(a - b)^2 + 4 * \frac{1}{2}ab = c^2$$

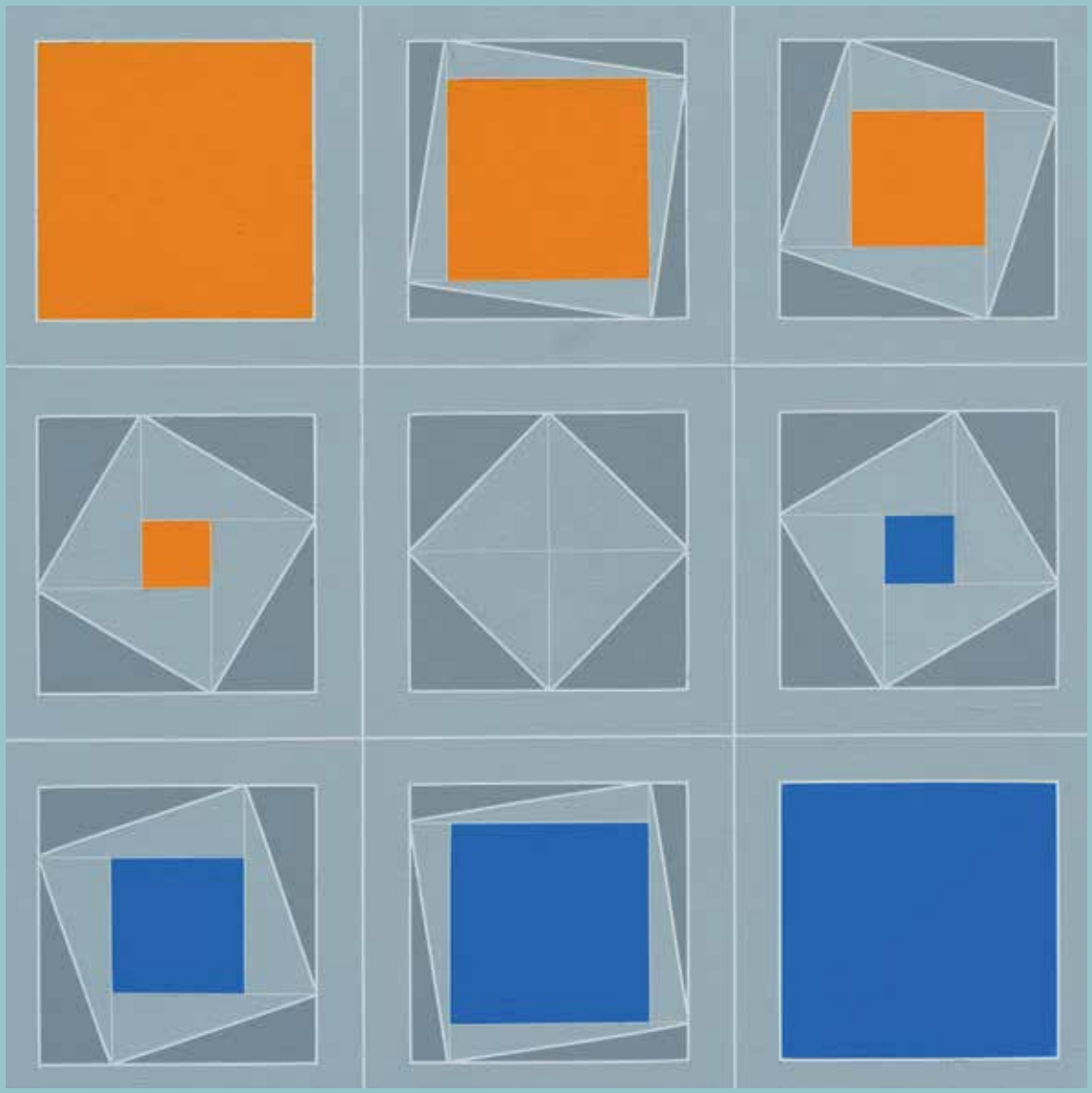
$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Ισχύει επίσης και το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.
  Αν για ένα τρίγωνο με πλευρές a, b, c ισχύει ότι $a^2 + b^2 = c^2$, τότε είναι ορθογώνιο.
  Οι θετικοί ακέραιοι που επαληθεύουν την εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$ είναι γνωστοί ως *Πυθαγόρειες τριάδες*. Μια πολύ γνωστή κατασκευή ορθογώνιου τριγώνου από ένα κομμάτι σκοινί με 3 + 4 + 5 = 12 ισαπέχοντες κόμπους βασίζεται στην Πυθαγόρεια τριάδα 3, 4, 5.

Μια Βαβυλώνια πήλινη πλάκα απαριθμεί τους ακέραιους που αντιστοιχούν στις *Πυθαγόρειες τριάδες*, κάτι το οποίο σημαίνει ότι αυτό το θεώρημα ή τουλάχιστον το αντίστροφό του πιθανόν να ήταν γνωστό πολύ πριν τον Πυθαγόρα.

«Δυναμικός» Πυθαγόρας



«Δυναμικός» Πυθαγόρας Ι

- Η ακολουθία των εικόνων δείχνει μια δυναμική διαδικασία στην οποία στο εσωτερικό ενός σταθερού τετραγώνου δημιουργείται ένα επιπλέον τετράγωνο. Το εσωτερικό τετράγωνο γίνεται ολοένα και μικρότερο και τελικά εξαφανίζεται, αλλά έπειτα μεγαλώνει ξανά, μέχρι να καταλήξει να είναι ίσο με το σταθερό τετράγωνο.

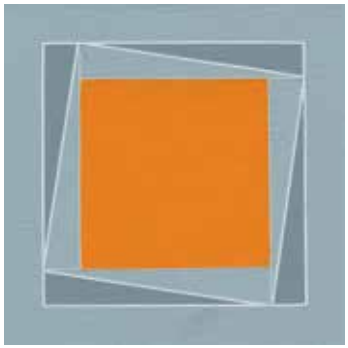
- Προκύπτουν ενδιαφέρουσες ερωτήσεις: Πώς σχηματίζονται τα εσωτερικά τετράγωνα; Τι συνδέσεις υπάρχουν με το Πυθαγόρειο θεώρημα;

- Πυθαγόρειο θεώρημα:
  Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

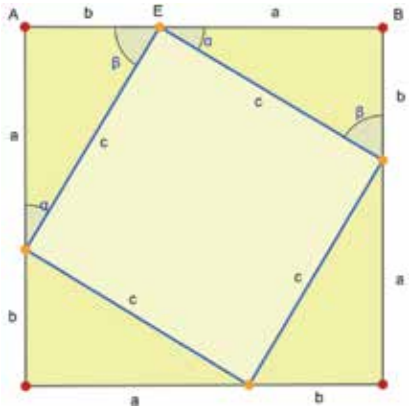
- Ο Έλληνας φιλόσοφος Πυθαγόρας ο Σάμιος (570 π.Χ. - 500 π.Χ.) ήταν ο ιδρυτής της αδελφότητας, η οποία, παρότι είχε θρησκευτικό χαρακτήρα, διατύπωσε αρχές που επηρέασαν τη σκέψη του Πλάτωνα (428 π.Χ. - 348 π.Χ.) και του Αριστοτέλη (384 π.Χ. - 322 π.Χ.) και συνέβαλαν στην ανάπτυξη της δυτικής φιλοσοφίας της λογικής. *«Τό γάρ σοφώτατον τῶν ὄντων ἐστίν ὁ ἀριθμός»* ήταν το πιστεύω των Πυθαγόρειων. Είναι βέβαιο ότι το παραπάνω θεώρημα ήταν γνωστό πολύ πριν τον Πυθαγόρα.

- Ο Elisha Scott Loomis (1852 - 1940) συγκέντρωσε και ταξινόμησε περίπου 370 αποδείξεις του θεωρήματος στο βιβλίο του *The Pythagorean Proposition*. Υπάρχουν όμως κι άλλες ακόμα αποδείξεις. Ο James A. Garfield (1831 - 1881), 20ός Πρόεδρος των Ηνωμένων Πολιτειών, δημοσίευσε μια ενδιαφέρουσα απόδειξη το 1876.

- Παίρνουμε ένα τετράγωνο από την εικόνα του Eugen Jost. Αυτό το κομμάτι δίνει μια ιδέα της απόδειξης. Χρειαζόμαστε μόλις δύο από τα τρία τετράπλευρα αυτού του σχήματος.



Ας ξεκινήσουμε όμως από την αρχή. Τοποθετούμε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές μήκους a, b, c σε ένα τετράγωνο, όπως φαίνεται παρακάτω.



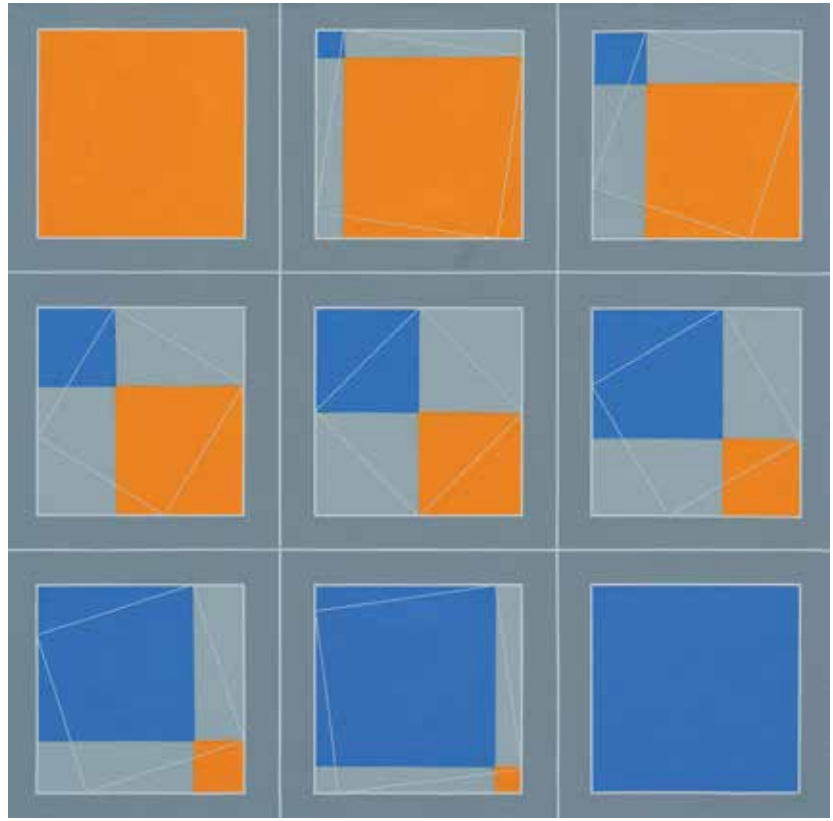
Τελικός μας στόχος είναι να αποδείξουμε ότι $a^2 + b^2$ ίσον c^2. Το εμβαδόν ολόκληρου του τετραγώνου είναι $(a + b)^2$. Το εμβαδόν κάθε τριγώνου είναι $\frac{1}{2}ab$, επομένως το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων τριγώνων είναι 2ab. Κατά συνέπεια, το εμβαδόν του τετράπλευρου στο κέντρο είναι $(a + b)^2 - 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2$.

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο στο κέντρο είναι τετράγωνο με εμβαδόν c^2.

Γνωρίζουμε ότι όλες οι πλευρές έχουν μήκος c, αλλά πρέπει να αποδείξουμε ότι οι γωνίες είναι ορθές. Ισχύει: $\alpha + \beta = 90^\circ$, επειδή η τρίτη γωνία σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο είναι 90°.
Επομένως και η γωνία στο Ε είναι 90° (η γραμμή ΑΒ είναι ευθεία). Η ίδια λογική ισχύει και για τις άλλες τρεις γωνίες του τετράπλευρου, οπότε πρόκειται για τετράγωνο με εμβαδόν c^2.

- Και η επόμενη ακολουθία εικόνων περιέχει απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

«Δυναμικός» Πυθαγόρας ΙΙ



Πρώτα από όλα εξετάζουμε τη δυναμική διαδικασία. Ξεκινάμε με το μεγάλο κίτρινο τετράγωνο. Οι κορυφές του –αρχικά– κρυμμένου τετραγώνου κινούνται διαρκώς πάνω στις πλευρές του μεγάλου τετραγώνου. Το εμβαδόν του κινούμενου τετραγώνου μειώνεται και φτάνει στο ελάχιστό του (στο μισό εμβαδόν του μεγάλου κίτρινου τετραγώνου), όταν οι κορυφές γίνονται τα μέσα του μεγάλου τετραγώνου. Τότε η διαδικασία προχωρά με αντίστροφο τρόπο και καταλήγει στο μεγάλο μπλε τετράγωνο.

Το κεντρικό τετράγωνο της εικόνας του Jost δείχνει μια ιδιαίτερη περίπτωση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Αναγνωρίζουμε ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, συνολικά οκτώ ίσα τρίγωνα.

Οποιαδήποτε δύο σχηματίζουν το τετράγωνο σε μία κάθετο του ορθογώνιου τριγώνου, ενώ τέσσερα σχηματίζουν το τετράγωνο στην υποτείνουσα. Έτσι έχουμε ένα περίπλοκο σχήμα τριγώνων που παρέχει μια σαφή διαισθητική απόδειξη.

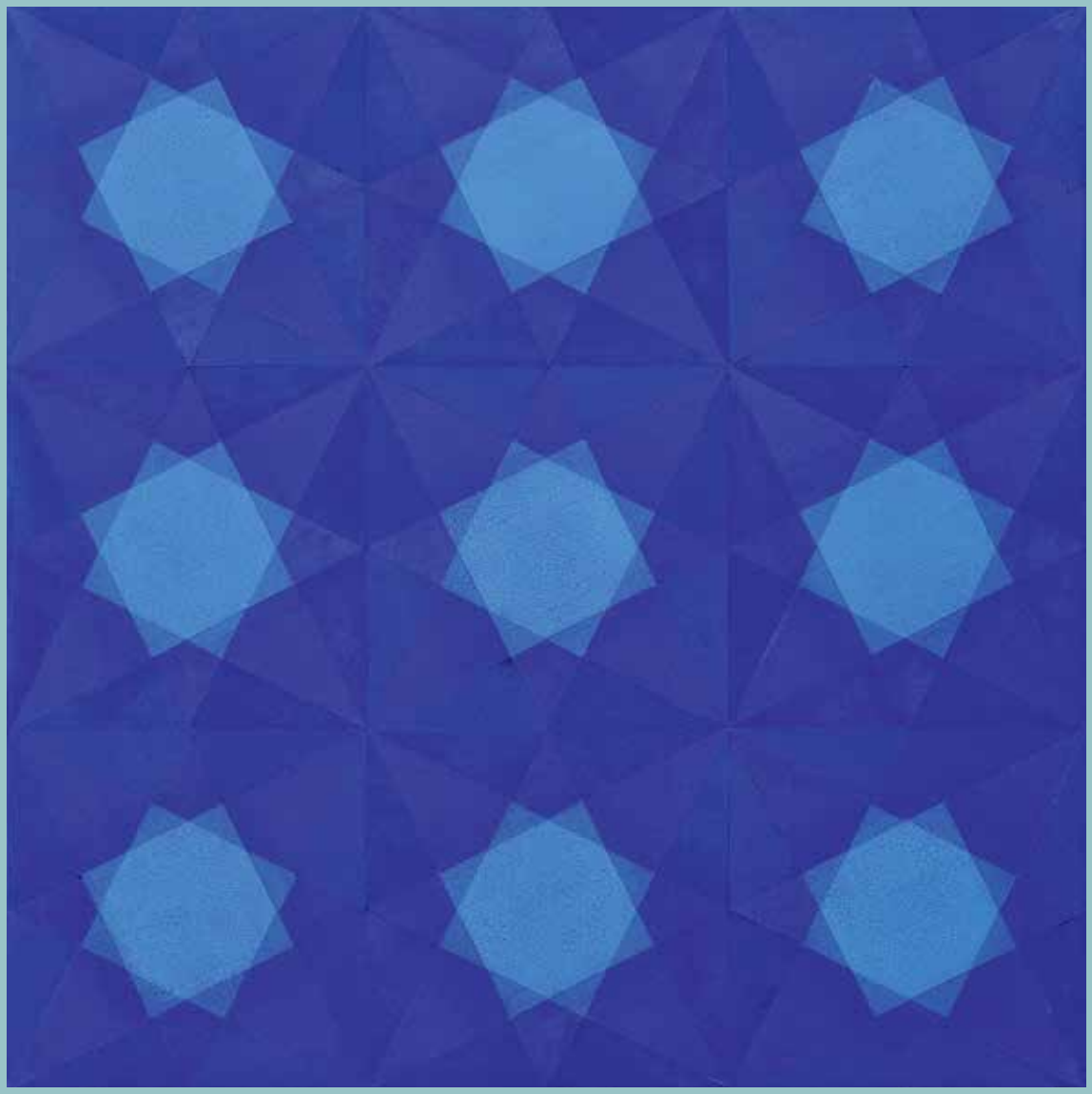
Για να αποδείξουμε τη γενική περίπτωση, επιλέγουμε ένα άλλο τετράγωνο της εικόνας.

Οι κάθετοι των ίσων ορθογώνιων τριγώνων έχουν πλευρές με μήκη a, b και υποτείνουσα με μήκος c. Κατά συνέπεια, το μεγάλο τετράγωνο έχει εμβαδόν $(a + b)^2$. Τώρα είναι εύκολο να επαληθεύσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Ο Λύκος

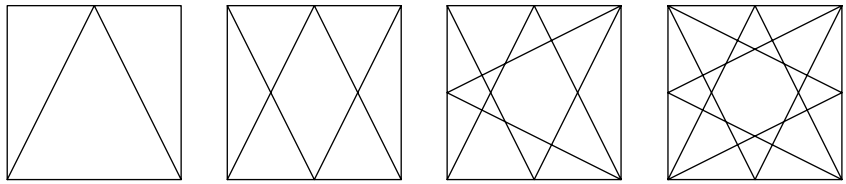
Παίζοντας με τον Πυθαγόρα

Μπλε Άστρα



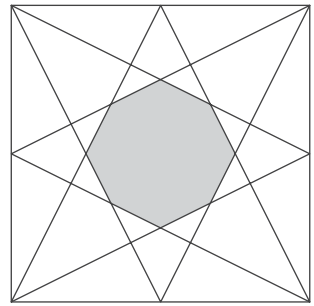
Μπλε Άστρα

- Σε ένα τετράγωνο, ενώνουμε τις δύο κοντινές κορυφές με το μέσο της απέναντι πλευράς. Επαναλαμβάνουμε αυτήν τη διαδικασία για κάθε πλευρά του τετραγώνου.

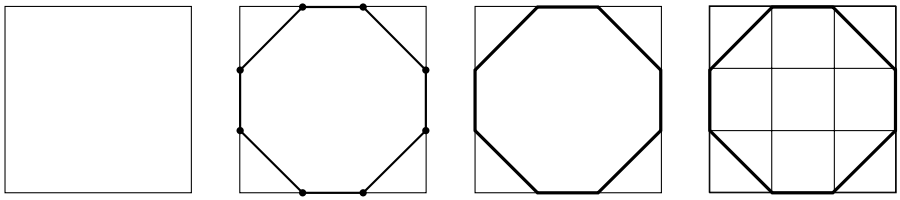


- Το «οκτάγωνο αστέρι» στο κέντρο του τετραγώνου είναι το βασικό σχήμα στον πίνακα *Blue Stars*. Εννέα από αυτά τα αστέρια σχηματίζουν την υποκείμενη δομή όλου του πίνακα. Αυτό το ιδιαίτερο οκτάγωνο αστέρι λέγεται *Knauth's figure* (σχήμα του Knauth). Ο Johannes Knauth (1864 - 1924) ήταν επικεφαλής οικοδόμος καθεδρικών ναών στο Στρασβούργο. Με μια ολοκαίνουργια τεχνική εφεύρεση κατάφερε να σώσει τον πύργο του καθεδρικού ναού του Στρασβούργου από την κατάρρευση και επίσης συμμετείχε στην ολοκλήρωση του καθεδρικού ναού της Κολωνίας.

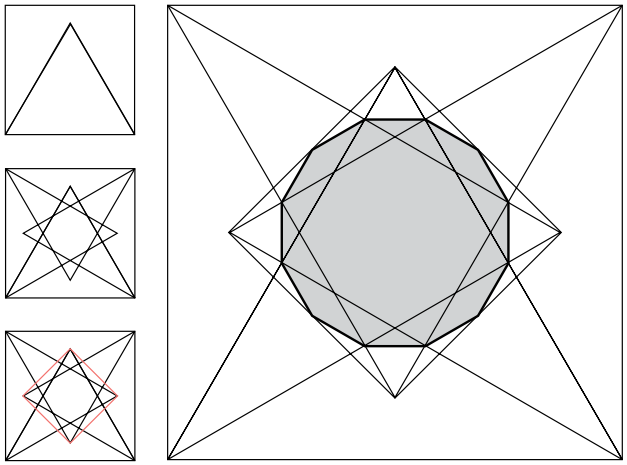
- Τα κανονικά πολύγωνα είναι και ισόπλευρα και ισογώνια. Ποια είναι η γνώμη σας; Είναι το οκτάγωνο αστέρι του σχήματος του Knauth κανονικό;



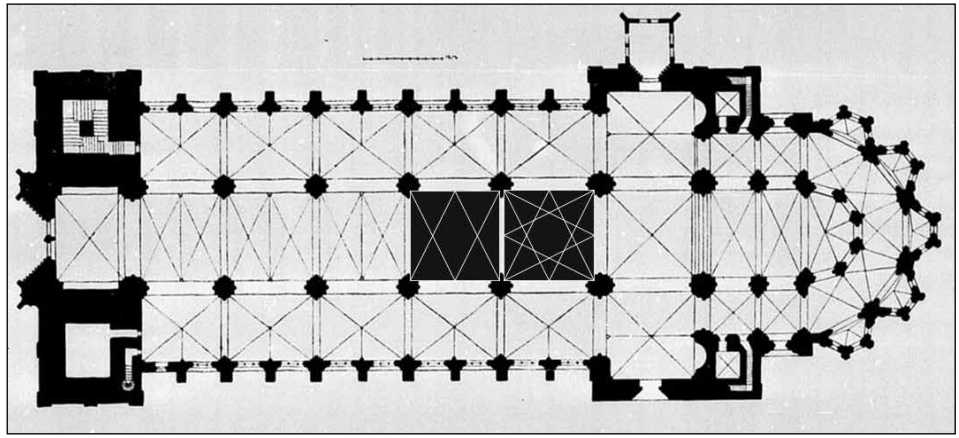
- Τώρα τριχοτομούμε τις πλευρές του τετραγώνου. Τα μαρκαρισμένα σημεία είναι οι κορυφές ενός οκταγώνου. Ποια είναι η γνώμη σας; Πρόκειται για κανονικό οκτάγωνο;



- Στις τέσσερις πλευρές ενός τετραγώνου, σχεδιάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα στραμμένα προς το εσωτερικό. Οι κορυφές των τριγώνων που δεν συμπίπτουν με τις κορυφές του σταθερού τετραγώνου είναι οι κορυφές ενός νέου τετραγώνου (κόκκινες γραμμές στο σχήμα). Τώρα εξετάζουμε τα μέσα των πλευρών του κόκκινου τετραγώνου μαζί με τα οκτώ μέσα των πλευρών των τριγώνων στο εσωτερικό. Αυτά τα σημεία είναι οι κορυφές ενός κανονικού δωδεκάγωνου (χρωματισμένο με γκρι στο κάτω σχήμα).



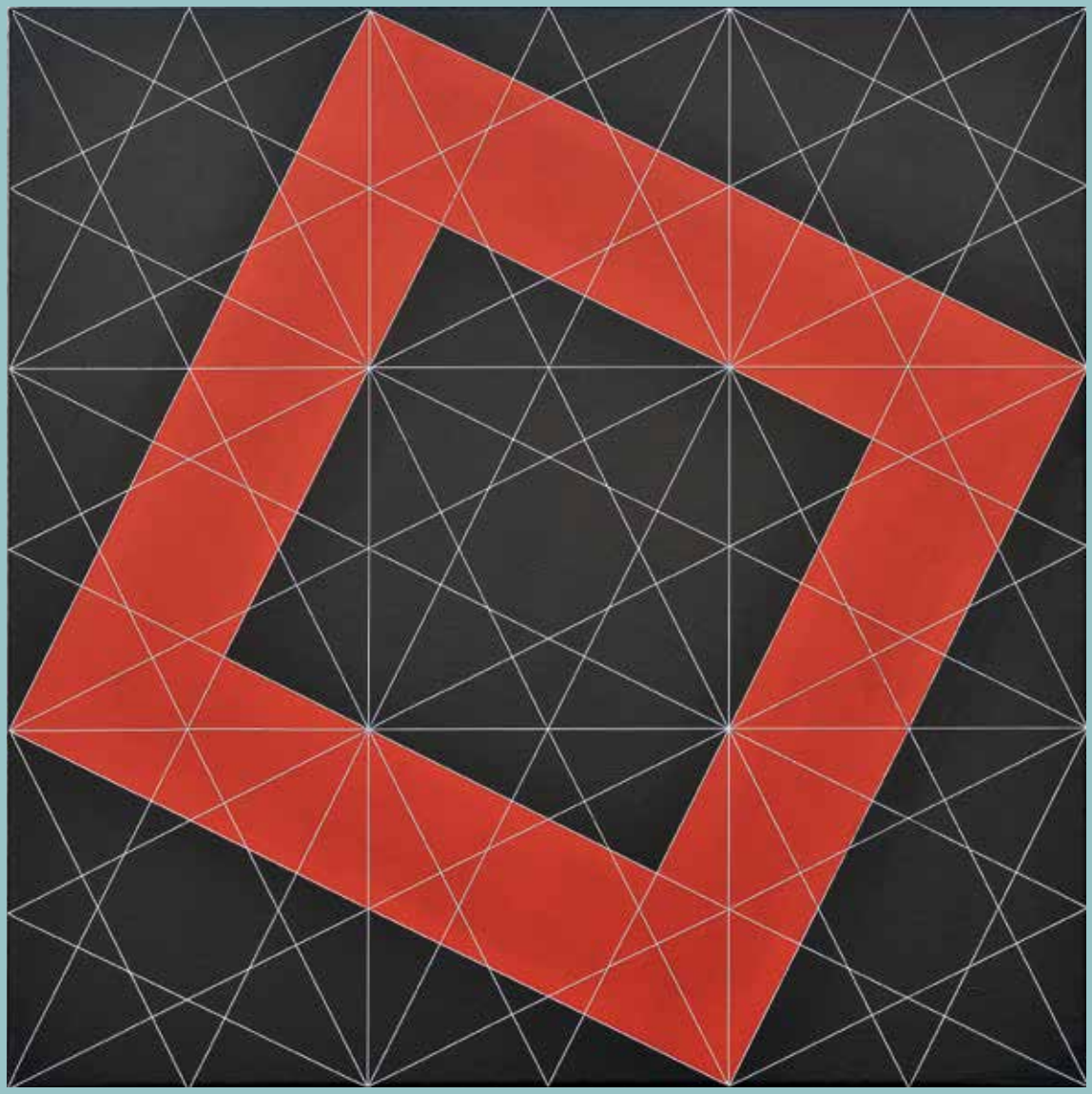
- Μελετώντας τις κατόψεις Ρομανικών εκκλησιών, βλέπουμε ότι συχνά χρησιμοποιείται ένα τετράγωνο ως μονάδα μέτρησης για τα δομικά στοιχεία του κτιρίου. Μέσα στο τετράγωνο μπορούμε να δούμε ένα τρίγωνο που έχει την ίδια βάση και ύψος με το τετράγωνο.



- Γιατί συγκεκριμένα τετράγωνο; Δεν έχουμε παρά να κάνουμε εικασίες. Το τετράγωνο περιέχει το νούμερο τέσσερα, το οποίο συμβολίζει κομμάτι της Δημιουργίας: οι τέσσερις εποχές, τα τέσσερα σημεία της πυξίδας, τα τέσσερα στοιχεία. Έχουμε επίσης το εγγεγραμμένο τρίγωνο. Τρεις φορές το τέσσερα κάνει δώδεκα. Ένα έτος έχει δώδεκα μήνες, χωρίζουμε την ημέρα σε δώδεκα ώρες φωτός και δώδεκα ώρες συσκότισης, ξέρουμε τα δώδεκα σημεία του ζωδιακού κύκλου.

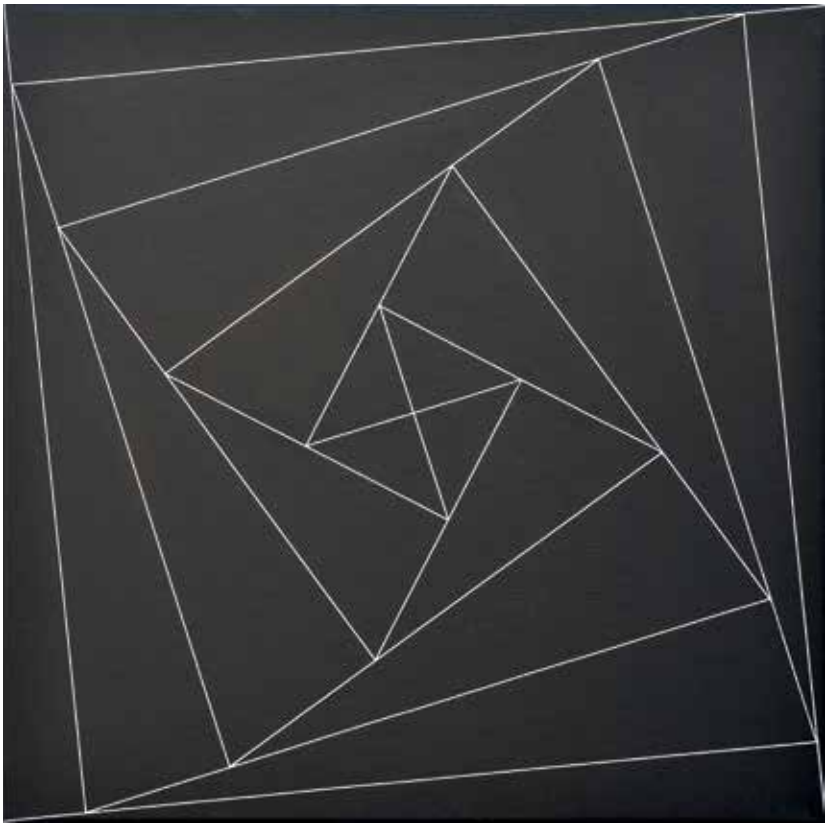
- Το δώδεκα είναι γνωστό ως ύψιστος (sublime) αριθμός. Τι σημαίνει αυτό; Οι διαιρέτες του δώδεκα είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 6, 12. Έχουμε συνολικά 6 διαιρέτες. Αν τους προσθέσουμε, μας κάνουν 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28. Και το 6 και το 28 είναι *τέλειοι αριθμοί*.
  Στη θεωρία των αριθμών, ο όρος «sublime» χρησιμοποιείται για έναν θετικό ακέραιο που έχει έναν τέλειο αριθμό θετικών διαιρετών (μαζί με τον εαυτό του) το άθροισμα των οποίων είναι ένας άλλος τέλειος αριθμός. Πρόκειται για πολύ σπάνια ιδιότητα. Μέχρι στιγμής, μόνο δύο τέτοιοι αριθμοί είναι γνωστοί. Το 12 και ένας αριθμός που αποτελείται από 76 δεκαδικά ψηφία.

Παίζοντας στο πλέγμα του Knauth



5 x 20%

0% - 20% - 40% - 60% - 80% - 100%



Χρυσή Τομή

1.618033988749894848204586834365638117
$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$
a:b=(a+b):b
$\varphi^1 = 1\varphi$
$\varphi^2 = 1\varphi + 1$
$\varphi^3 = 2\varphi + 1$
$\varphi^4 = 3\varphi + 2$
$\varphi^5 = 5\varphi + 3$
$\varphi^6 = 8\varphi + 5$
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
MMXVIII

Χρυσή Τομή

- «Η γεωμετρία διαθέτει δύο μεγάλους θησαυρούς: ο ένας είναι το Πυθαγόρειο θεώρημα και ο άλλος η διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο. Τον πρώτο μπορούμε να τον συγκρίνουμε με χρυσάφι και τον δεύτερο με ένα πολύτιμο κόσμημα».
  Johannes Kepler (1571 - 1630)

- Στις μέρες μας, ο «άκρος και μέσος λόγος» είναι περισσότερο γνωστοί με το όνομα «χρυσή τομή». Παρακάτω ο ορισμός:
  Η χρυσή τομή είναι ένας ιδιαίτερος αριθμός που προκύπτει, αν διαιρέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε ο λόγος ολόκληρου του μήκους προς το μεγαλύτερο τμήμα να ισούται με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο τμήμα.

  Με άλλα λόγια: *Το σύνολο είναι για το τμήμα ό,τι είναι το τμήμα για το υπόλοιπο.*

  Για να προσδιορίσουμε την τιμή της χρυσής τομής, μεταφράζουμε τον παραπάνω ορισμό στη γλώσσα των μαθηματικών (το σύνολο = a + b, τμήμα = a, υπόλοιπο = b, όπου a > b). Επομένως, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\frac{a+b}{a} =$

  $$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} \leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1 \leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

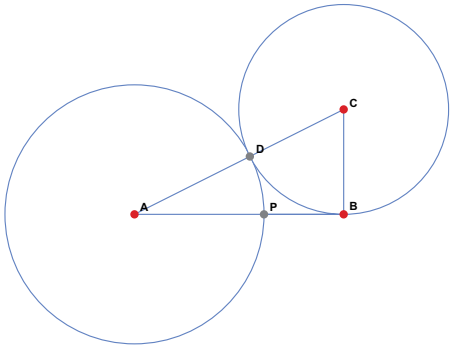
- Η τιμή $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ της χρυσής τομής είναι ένας άρρητος αριθμός και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ. Ο αριθμός στο περίγραμμα του πίνακα δείχνει την αρχή της δεκαδικής αναπαράστασης του φ που δεν τελειώνει, ούτε επαναλαμβάνεται ποτέ.
  φ = 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354 4....

- Το σύμβολο φ για τη χρυσή τομή καθιερώθηκε στις αρχές του 20ού αιώνα. Δημιουργεί έναν συσχετισμό με τον Φειδία (περίπου 480 - περίπου 430 π.Χ.), τον κορυφαίο γλύπτη και αρχιτέκτονα, χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα του ονόματός του.

- Η χρυσή τομή πιθανότατα ανακαλύφθηκε από τους αρχαίους Έλληνες και η καταγεγραμμένη ιστορία της ξεκινά με τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια που γράφτηκαν περίπου το 300 π.Χ. Αυτή η περίφημη πραγματεία αποτελείται από 13 βιβλία (=κεφάλαια). Η χρυσή τομή εμφανίζεται στο βιβλίο ΙΙ που αφορά το εμβαδόν. Το βιβλίο VI περιέχει έναν πιο σαφή ορισμό: «Μια ευθεία γραμμή λέγεται ότι έχει κοπεί σε άκρο και μέσο λόγο, όταν όλη η ευθεία είναι για το μεγαλύτερο κομμάτι ό,τι είναι το μεγαλύτερο κομμάτι για το μικρότερο». Παρεμπιπτόντως, η πρώτη μετάφραση του έργου του Ευκλείδη στα αγγλικά έγινε το 1570.

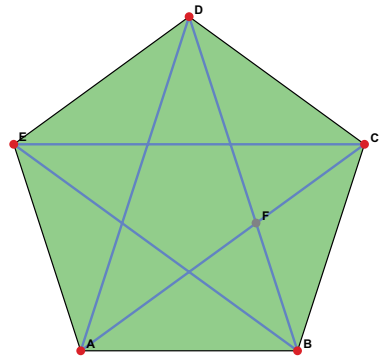
- Ο Ευκλείδης είχε διττό σκοπό γράφοντας τα *Στοιχεία*. Αφενός, ήθελε να συγκεντρώσει όλα τα βασικά μαθηματικά ευρήματα της εποχής του και να συνθέσει ένα είδος εγκυκλοπαίδειας που θα λειτουργούσε ως εγχειρίδιο διδασκαλίας. Αφετέρου, εισήγαγε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία για την παρουσίαση αποδείξεων και δημιούργησε μια νέα μαθηματική θεωρία που βασίζεται σε αξιώματα (αυταπόδεικτα γεγονότα) και στους νόμους της αφαίρεσης.

- Κατασκευή του σημείου P που διαιρεί το καθορισμένο τμήμα [AB] στη χρυσή τομή:



– [BC] ⊥ [AB] and |BC| = ½|AB|
– k(C; r =|BC|) ∩ [AC] = D
– k(A; r =|AD|) ∩ [AB] = P

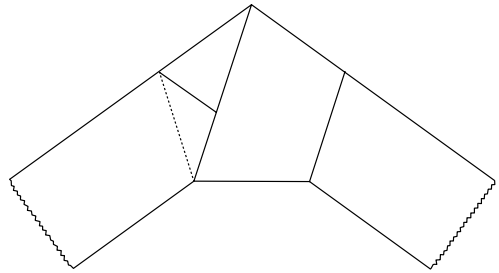
- Το πεντάγραμμο ή το πεντάγωνο αστέρι ήταν το χαρακτηριστικό σύμβολο της Πυθαγόρειας κοινωνίας. Αυτό το πεντάκτινο αστέρι μπορεί να σχηματιστεί σχεδιάζοντας όλες τις διαγωνίους ενός κανονικού πενταγώνου.



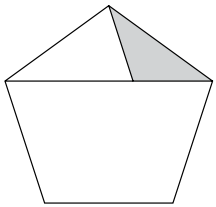
Σε αυτό το σχήμα μπορούμε να βρούμε τη χρυσή τομή δύο φορές:

- Οι διαγώνιοι (ξεκινώντας από διαφορετικές κορυφές) διαιρούνται με αυτόν τον λόγο, π.χ. $\frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|BD|}{|FD|} = \varphi$
- Ο λόγος του μήκους μιας διαγωνίου προς το μήκος μια πλευράς ισούται με φ.

► Ένα κανονικό πεντάγωνο με μια λωρίδα χαρτί:
Υπάρχει ένας απλός τρόπος να «κατασκευάσουμε» ένα κανονικό πεντάγωνο, φτάνει να μην πάρουμε το αποτέλεσμα ιδιαίτερα στα σοβαρά. Δεν έχουμε παρά να πάρουμε μια λωρίδα χαρτί και να δέσουμε έναν απλό κόμπο. Στη συνέχεια σφίγγουμε προσεκτικά και πιέζουμε μέχρι να γίνει επίπεδο.



Βλέπουμε τη μια διαγώνιο ολόκληρη, κομμάτι της δεύτερης διαγωνίου και το σημείο τομής τους. Αυτό το σημείο διαιρεί τις διαγωνίους στη χρυσή τομή.



- Σε ένα *χρυσό ορθογώνιο*, ο λόγος του μήκους προς το πλάτος είναι η χρυσή τομή. Οι αρχαίοι Έλληνες αρχιτέκτονες και καλλιτέχνες γνώριζαν το αποτέλεσμα που είχε η χρυσή τομή στην αρμονία. Ο Παρθενώνας είναι ένα παράδειγμα της πρώιμης χρήσης του χρυσού ορθογωνίου στην αρχιτεκτονική. Το χρυσό ορθογώνιο εμφανίζεται επίσης στις τέχνες, σε πίνακες των Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Piet Mondrian και στην έκθεση του Salvador Dali.

- Οι λέξεις *Girasole* (Ηλιοτρόπιο) και *Parthenon* (Παρθενώνας) στον πίνακα του Jost αποδεικνύουν τη σχέση μεταξύ της ακολουθίας Fibonacci και της χρυσής τομής. «Girasole» σημαίνει στα ιταλικά «ηλιοτρόπιο». Κοιτάζοντας το κεφάλι αυτού του λουλουδιού, παρατηρούμε και δεξιόστροφα και αριστερόστροφα σπειροειδή μοτίβα που σχηματίζονται από τα ανθύλλια. Ο αριθμός αυτών των σπειροειδών σχημάτων εξαρτάται από το μέγεθος του ηλιοτρόπιου, αλλά πρόκειται για διαδοχικούς αριθμούς Fibonacci. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούμε να εντοπίσουμε αρκετά χρυσά ορθογώνια στην παγκοσμίου φήμης πρόσοψη του Παρθενώνα.

- Σκεφτείτε τρία πανομοιότυπα χρυσά ορθογώνια. Είναι μεταξύ τους κάθετα και αλληλοτέμνονται συμμετρικά. Οι γωνίες αυτών των ορθογωνίων συμπίπτουν με τις κορυφές ενός εικοσάεδρου, του οποίου το κέντρο είναι το κοινό σημείο των ορθογωνίων.

- φ: η λύση της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$. Επομένως, $\varphi^2 = C + 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές αρκετές φορές με το φ έχουμε:

  $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$
  $\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = (2\varphi + 1) + (\varphi + 1) = 3\varphi + 2$
  $\varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = (3\varphi + 2) + (2\varphi + 1) = 5\varphi + 3$
  $\varphi^6 = \varphi^5 + \varphi^4 = 8\varphi + 5$
  $\varphi^7 = \varphi^6 + \varphi^5 = 13\varphi + 8$
  ...

  Βλέπουμε ότι, για να έχουμε ως αποτέλεσμα οποιαδήποτε δύναμη του φ, αρκεί να προσθέσουμε τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων δυνάμεων. Αναγνωρίζετε το μοτίβο; Αναγνωρίζετε τους αριθμούς Fibonacci;

- Τα πηλίκα των αριθμών Fibonacci f_n που διαιρούνται από τους προηγούμενούς τους f_{n-1} προσεγγίζουν το φ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n-1}} = \varphi$$

- Πώς μπορούμε να καθορίσουμε την τιμή x της ασυνήθιστης παράστασης των τετραγωνικών ριζών του 1;

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

  Τετραγωνίζουμε τις δύο πλευρές της παραπάνω εξίσωσης. Ο τετραγωνισμός της δεξιάς πλευράς απλά αφαιρεί την εξωτερική τετραγωνική ρίζα και έχουμε

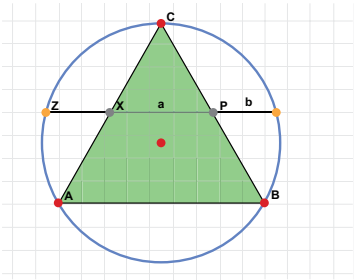
$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

  Καθώς η δεύτερη παράσταση στη δεξιά πλευρά τείνει προς το άπειρο, ουσιαστικά ισούται με x. Έχουμε συνεπώς την τετραγωνική εξίσωση $x^2 = x + 1$. Αυτή όμως είναι ακριβώς η εξίσωση που ορίζει τη χρυσή τομή. Επομένως η ατελείωτη παράσταση x ισούται με φ.

- Κάποιο κομμάτι της έρευνας έχει επικεντρωθεί στο απλό ερώτημα της προέλευσης του ονόματος «χρυσή τομή».

- Παρότι η ίδια η αναλογία είναι γνωστή από την αρχαιότητα, το όνομα αυτό χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά γύρω στη δεκαετία του 1830 από τον Γερμανό μαθηματικό Martin Ohm (1792 - 1872), αδελφό του διάσημου φυσικού Georg Simon Ohm (1789 - 1854). Στο βιβλίο του *The Pure Elementary Mathematics* (Τα Καθαρά Στοιχειώδη Μαθηματικά) γράφει: «Diese Zertheilung einer beliebigen Linie in 2 solche Teile nennt man wohl auch den goldenen Schnitt. (Συνήθως αυτή η διαίρεση μιας αυθαίρετης γραμμής σε δύο τέτοια τμήματα λέγεται χρυσή τομή»). Ο Ohm σίγουρα δεν επινόησε τον όρο, αλλά είναι πιθανό να χρησιμοποίησε ένα κοινώς αποδεκτό όνομα ιδιαίτερα δημοφιλές σε μη μαθηματικούς κύκλους. Μετά από το βιβλίο του Ohm, ο όρος «χρυσή τομή» άρχισε να εμφανίζεται συχνά στη γερμανική βιβλιογραφία για τα μαθηματικά και την ιστορία της τέχνης και χρησιμοποιείται σήμερα σε όλο τον κόσμο.

- Το σχέδιο του Eugen Jost δείχνει πώς φτιάχνεται η χρυσή τομή. Το σχήμα δίπλα του εξηγεί πώς φτιάχνεται. Θεωρούμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο ABC βρίσκεται εντός ενός περιγεγραμμένου κύκλου. Το X και το P είναι τα μέσα των πλευρών [AC] και [BC] αντίστοιχα. Η γραμμή XP τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία Y και Z. Κατόπιν το P διαιρεί το |XY| στη χρυσή τομή.



ο Fibonacci συναντά τον Πυθαγόρα

1 2 3

5 8 13

21 34 55

89 144 233

377 610 987

.....

12 586 269 025

Ο Fibonacci συναντά τον Πυθαγόρα

- Σίγουρα το όνομα Πυθαγόρας είναι πολύ γνωστό από το σχολείο, ενώ το όνομα Fibonacci είναι πιθανόν λιγότερο γνωστό. Περίπου 1700 χρόνια χωρίζουν τις δύο προσωπικότητες. Πώς μπορούν όμως να συναντηθούν;

- Ο Πυθαγόρας (περίπου 570 π.Χ. - περίπου 500 π.Χ.) είχε καταγωγή από το νησί της Σάμου και ίδρυσε μια αδελφότητα αφιερωμένη στα μαθηματικά στην Κάτω Ιταλία (εκείνη την εποχή κομμάτι της Μεγάλης Ελλάδας). Το όνομα Πυθαγόρας συνδέεται στενά με την ειδική σχέση ανάμεσα στα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχει ως εξής:
  Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

- Ο Fibonacci (περίπου 1170 - περίπου 1240), του οποίου το πραγματικό όνομα ήταν Leonardo da Pisa, ήταν έμπορος και μαθηματικός που ζούσε κυρίως στη Δημοκρατία της Πίζας. Σήμερα είναι κυρίως γνωστός για ένα μικρό πρόβλημα σχετικά με τον αριθμό των απογόνων των κουνελιών που έθεσε στο περίφημο «Βιβλίο των Υπολογισμών (Liber Abaci)». Το βιβλίο αυτό είχε μεγάλη επιρροή, γιατί εκεί ο Leonardo υποστήριξε το αραβικό σύστημα αριθμών και εξήγησε την εφαρμογή του, ειδικά για τους εμπόρους.

- Το μικρό πρόβλημα που αναφέραμε παραπάνω οδηγεί στους γνωστούς αριθμούς Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Πώς προκύπτει αυτή η αριθμητική ακολουθία;

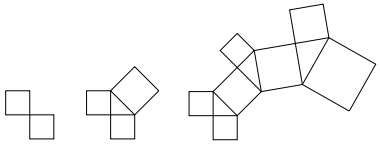
- Ποιος αριθμός Fibonacci είναι μετά το 987;

- Είναι το 12.586.269.025 αριθμός Fibonacci;

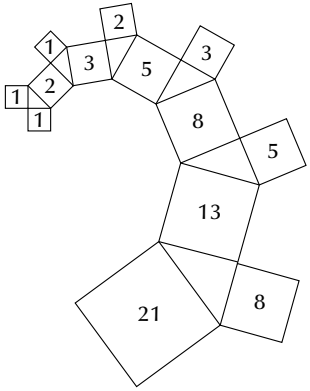
- Η ιστορία πίσω από τους αριθμούς Fibonacci είναι το ακόλουθο πρόβλημα:
  Πόσα ζεύγη κουνελιών θα γεννηθούν σε ένα χρόνο, ξεκινώντας από ένα ζεύγος, εάν κάθε μήνα, από κάθε ζεύγος γεννιέται ένα νέο ζεύγος που είναι γόνιμο μετά από δύο μήνες;

- Και η συνάντηση του Fibonacci με τον Πυθαγόρα; Για να είμαστε ακριβείς, εξετάζουμε τετράγωνα Fibonacci σε ένα Πυθαγόρειο σχήμα:

Δύο τετράγωνα με πλευρές μήκους 1 (και άρα εμβαδόν 1) τοποθετούνται μαζί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ακουμπούν οι κορυφές τους και οι διαδοχικές πλευρές να είναι κάθετες μεταξύ τους. Αυτές οι πλευρές είναι οι κάθετοι ενός ορθογώνιου τριγώνου. Το τετράγωνο πάνω από την αντίστοιχη υποτείνουσα έχει εμβαδόν 2. Με την κατάλληλη τοποθέτηση ενός από τα τετράγωνα μιας καθέτου σε μια ελεύθερη κορυφή του τετραγώνου της υποτείνουσας θα έχουμε ένα νέο ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο στην υποτείνουσα του οποίου έχει εμβαδόν 3.
Τώρα το τετράγωνο στη μεγαλύτερη κάθετο τοποθετείται στο τετράγωνο στην υποτείνουσα και η διαδικασία συνεχίζεται. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται σταδιακά η σπείρα του Πυθαγόρα.



Τα εμβαδά των δύο αρχικών τετραγώνων μαζί με τα εμβαδά των τετραγώνων στην υποτείνουσα αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία της ακολουθίας Fibonacci.



► Η έννοια του όρου *σπείρα* στα μαθηματικά διαφέρει από τη χρήση της λέξης στην καθημερινή γλώσσα. Όταν ακούμε τη λέξη σπείρα, συχνά σκεφτόμαστε κυκλικές σκάλες, όστρακα σαλιγκαριών, έλικες ή σπειροειδή ελατήρια, δηλαδή χωρικές δομές. Στα μαθηματικά, μόνο επίπεδα σχήματα ονομάζονται σπείρες.

Γύρνα, γύρνα, γύρνα

$\sqrt{2}$
$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}}$
EADEM MUTATA RESURGO

Γύρνα, γύρνα, γύρνα

- Σπείρα είναι μια καμπύλη που ξεκινά από ένα σημείο, και κινείται πιο μακριά, καθώς γυρίζει γύρω από το σημείο.

- Η εντολή «γύρνα, γύρνα, γύρνα» μπορεί να θεωρηθεί ως γενική κατευθυντήρια γραμμή για τη συμπεριφορά μιας σπείρας. Μια περισσότερο λεπτομερής περιγραφή είναι διαθέσιμη στην επιτύμβια επιγραφή του Jakob Bernoulli (1654 – 1705) στο μοναστήρι Basel Münster: «*Eadem mutata resurgo* – παρά την αλλαγή, θα εγερθώ με την ίδια μορφή». Αυτή η φράση συνοψίζει τα πολλά χαρακτηριστικά της σπείρας: την τεντώνουμε, την περιστρέφουμε ή την αντιστρέφουμε και πάντα μένει η ίδια.

- Η πολύχρωμη σύνθεση δείχνει ορθογώνια διατεταγμένα σε μορφή σπείρας. Αυτό είναι καλύτερα ορατό, όταν συνδέουμε τα σημεία τομής των διαγωνίων των μεμονωμένων ορθογωνίων με κυκλικά τόξα. Ξεκινούμε με το μαύρο ορθογώνιο και συνεχίζουμε με το λευκό, το κίτρινο, το πράσινο...

- Όλα αυτά τα ορθογώνια έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: τα μήκη των πλευρών τους έχουν την αναλογία $\sqrt{2} : 1$.

- Ένα φύλλο χαρτί έχει συνήθως ορθογώνιο σχήμα. Το διεθνές πρότυπο μεγέθους χαρτιού ISO 216 βασίζεται επίσης στην αναλογία εικόνας $\sqrt{2} : 1$. Με κάθε φύλλο χαρτί είναι σαν να κρατάμε στο χέρι μας τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$. Συνεπώς, συχνά αγγίζουμε το «άρρητο» χωρίς να το ξέρουμε!

- Γιατί το $\sqrt{2}$ εμφανίζεται ειδικά σε σχέση με το πρότυπο για το μέγεθος χαρτιού; Για την απάντηση σε αυτήν την ερώτηση, εξετάζουμε τον ορισμό των μεγεθών χαρτιού στις σειρές A1, A2, A3, A4, A5...
  - Τα διαδοχικά μεγέθη χαρτιού ορίζονται με μείωση κατά το ήμισυ του προηγούμενου μεγέθους χαρτιού στη μεγαλύτερη πλευρά. Αυτό επίσης μειώνει το εμβαδόν κάθε φύλλου στο ήμισυ.
  - Όλα τα μεγέθη χαρτιού είναι όμοια, που σημαίνει ότι η αναλογία $\frac{\textit{μεγάλη πλευρά}}{\textit{μικρή πλευρά}}$ είναι πάντα ίση.

- Μεταφράζουμε αυτόν τον ορισμό στη γλώσσα των μαθηματικών: Σε ένα φύλλο χαρτί ονομάστε τη μεγαλύτερη πλευρά a και τη μικρότερη πλευρά b.

Στη συνέχεια διπλώστε στη μέση κατά πλάτος. Εφόσον η αναλογία εικόνας παραμένει η ίδια, έχουμε:

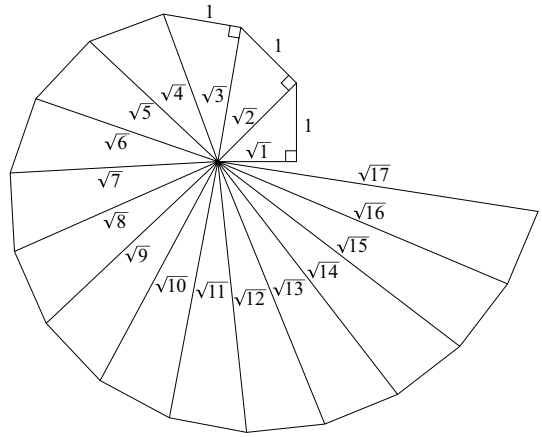
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} \text{ και } a^2 = 2b^2 \text{ και } \frac{a^2}{b^2} = 2 \text{ και } \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η αναλογία της μεγαλύτερης πλευράς προς τη μικρότερη πλευρά ενός φύλλου χαρτιού στη σειρά Α είναι πάντοτε $\sqrt{2}$.

- Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μέγεθος χαρτιού Α4 έχει διαστάσεις 210 x 297 χιλιοστά. Το βασικό μέγεθος χαρτιού Α0 έχει εμβαδόν 1 m^2.

- $\sqrt{2}$: άρρητος αριθμός. Συνεπώς δεν θα βρούμε κανένα μοτίβο στο δεκαδικό του κλάσμα. Τι έκπληξη όμως, όταν εξετάζουμε το συνεχές κλάσμα της $\sqrt{2}$ (στα δεξιά της σύνθεσης των ορθογώνιων)! Εδώ έχουμε ένα επαναλαμβανόμενο (περιοδικό) μοτίβο. Παρεμπιπτόντως, αυτή η ιδιότητα ισχύει για κάθε τετραγωνική ρίζα. Αντιθέτως, το συνεχές κλάσμα ενός ρητού αριθμού είναι πεπερασμένο.

- Η Σπείρα του Θεόδωρου. (Ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος ήταν Έλληνας της Λιβύης που έζησε κατά τη διάρκεια του 5ου αιώνα π.Χ). Μπορούμε να κατασκευάσουμε την τετραγωνική ρίζα του θετικού ακέραιου n, αν έχουμε προηγουμένως κατασκευάσει την τετραγωνική ρίζα του θετικού ακέραιου n-1. Αυτή η αναδρομική διαδικασία βασίζεται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ξεκινάμε με ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με κάθε σκέλος να έχει το μήκος της μονάδας. Αυτή η υποτείνουσα έχει μήκος $\sqrt{2}$. Ένα άλλο ορθογώνιο τρίγωνο σχηματίζεται με τη μία κάθετο να είναι η υποτείνουσα του προηγούμενου τριγώνου (με μήκος $\sqrt{2}$) και την άλλη κάθετο να έχει μήκος 1. Το μήκος της υποτείνουσας αυτού του δεύτερου ορθογώνιου τριγώνου είναι $\sqrt{2}$. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς. Το νιοστό τρίγωνο στην ακολουθία είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκος καθέτων $\sqrt{n}$ και 1, και με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{(n+1)}$.



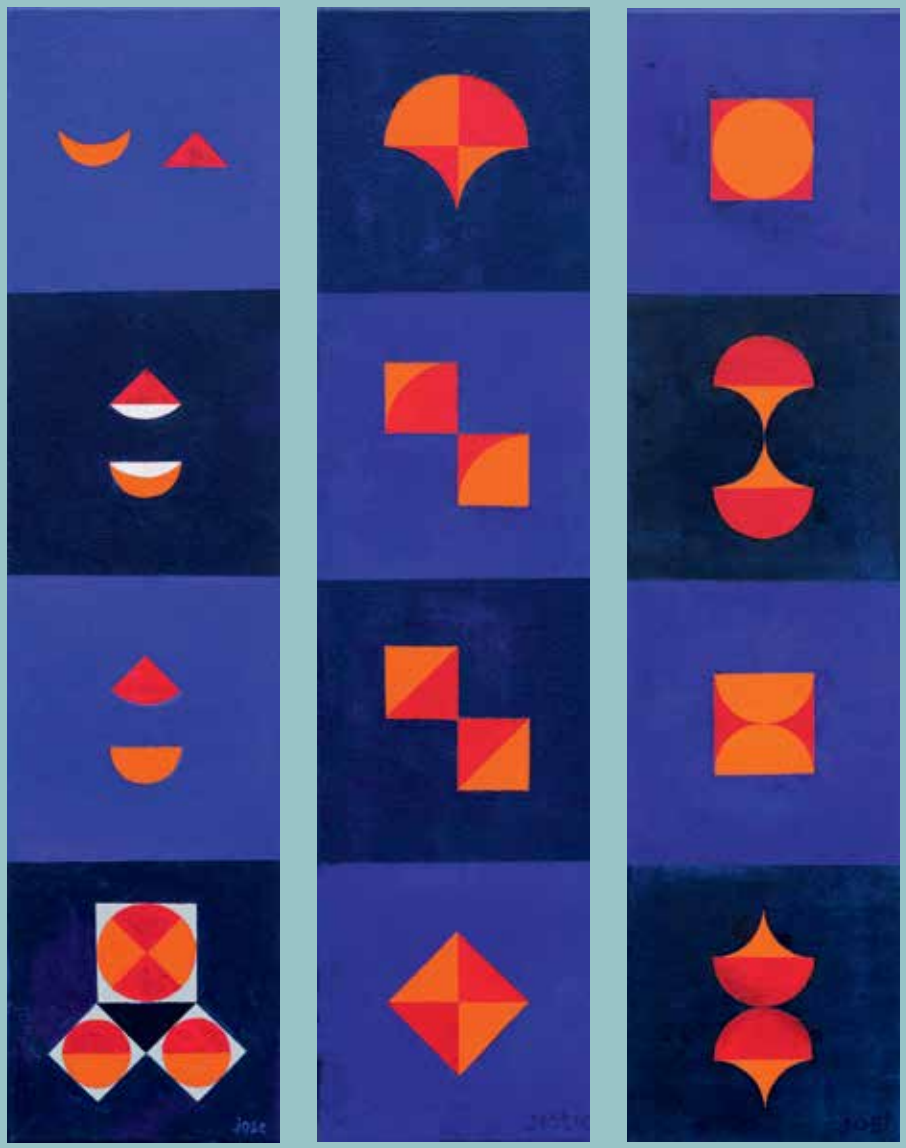
► Σύντομο ιστορικό του συμβόλου της ρίζας

Ο Νικόμαχος (περίπου 160 μ.Χ.) χρησιμοποίησε την ελληνική λέξη «ρίζα» με την έννοια *της ρίζας ενός φυτού*, αλλά και της *βάσης* ή της *προέλευσης* με τη μεταφορική έννοια της λέξης. Ο Βοήθιος (περίπου 480 μ.Χ. - περίπου 524 μ.Χ.) μετέφρασε τη λέξη κυριολεκτικά ως *radix* στα λατινικά. Το *Radix* συντομεύτηκε ως *R* ή *R* με κάθετο στη δεξιά πλευρά του *R*. Το σύμβολο √ που όλοι ξέρουμε χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά σε ένα γερμανικό βιβλίο άλγεβρας το 1525. Εάν τα ψηφία κάτω από τη ρίζα ήταν πολλά, τα βάζαμε σε παρένθεση και αργότερα προσθέσαμε μια γραμμή από πάνω τους.

SQRT 2

1.41421356237309 5
0488016887242096 9
8078569671875376 9
4807317667973799 0
7324784621070388 5
0387534327641572 7
3501384623091229 7
0249248360558507 3
7212644121497099 9
3583141322266592 7
5055927557999505 0
1152782060571470 1

Περί τετραγωνισμού του κύκλου



Περί τετραγωνισμού του κύκλου

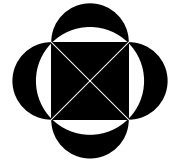
- Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι η κατασκευή ενός τετραγώνου με το ίδιο εμβαδόν με ένα δεδομένο κύκλο (εμβαδόν $r^2 \pi$).

- Οι Έλληνες φιλόσοφοι θεωρούσαν την ευθεία γραμμή και τον κύκλο τέλειες καμπύλες. Κατά συνέπεια, τα μόνα κατασκευαστικά εργαλεία που επιτρέπονταν ήταν ο κανόνας (αδιαβάθμητος χάρακας) και ο διαβήτης.

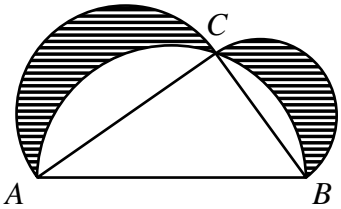
- Οι μηνίσκοι είναι επίπεδες περιοχές που ορίζονται από τα τόξα δύο διαφορετικών κύκλων. Η αντίστοιχη λέξη στα αγγλικά, lune, προέρχεται από τη λατινική λέξη *lunar* που σημαίνει «με σχήμα φεγγαριού».

- Σε τρεις μακρόστενες επιφάνειες, ο Eugen Jost δείχνει πώς σχήματα που ορίζονται από τόξα διαφορετικών κύκλων μετατρέπονται σε τετράγωνα.

- Ο μηνίσκος και το αντίστοιχο ισόπλευρο ορθογώνιο τρίγωνο έχουν το ίδιο εμβαδόν. Επομένως είναι δυνατό τέσσερις πανομοιότυποι μηνίσκοι να μετατραπούν σε ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού.



- Ο Ιπποκράτης ο Χίος (περίπου 460 π.Χ. - περίπου 380 π.Χ.) κατάφερε να τετραγωνίσει μηνίσκους. Ανακάλυψε και απέδειξε ότι *το άθροισμα των εμβαδών δύο μηνίσκων που έχουν κατασκευαστεί στις δύο καθέτους ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το εμβαδόν αυτού του τριγώνου*.



- Ο Ιπποκράτης πιθανόν πίστευε ότι το αποτέλεσμά του θα οδηγούσε στη λύση του ίδιου του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου. Ωστόσο, οι προσπάθειές του δεν απέδωσαν καρπούς. Την περίοδο που ακολούθησε όλες οι προσπάθειες που έγιναν απέτυχαν και αυτές.

- Αρχικά ο Ιπποκράτης ήταν έμπορος, αλλά όχι επιτυχημένος. Ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι τον εξαπάτησαν Βυζαντινοί τελωνειακοί υπάλληλοι. Σύμφωνα με άλλες πηγές, το εμπορικό του πλοίο καταλήφθηκε από πειρατές. Έτσι, πήγε στην Αθήνα, για να σώσει την περιουσία του στο δικαστήριο. Δεν γνωρίζουμε τι έγινε με την καταγγελία του, αλλά κατά την παραμονή του στην Αθήνα μελέτησε γεωμετρία και έκανε πολλές δημοσιεύσεις για την επίπεδη γεωμετρία.

- Δεν πρέπει να συγχέουμε τον «δικό μας» Ιπποκράτη τον Χίο με τον διάσημο γιατρό Ιπποκράτη τον Κώο, συντάκτη του όρκου του Ιπποκράτη.

- *Ο τετραγωνισμός του κύκλου* είναι ένα από τα τρία διάσημα προβλήματα των αρχαίων Ελλήνων. Τα άλλα δύο είναι *η τριχοτόμηση γωνία*ς (η διαίρεση μιας γωνίας σε τρεις πανομοιότυπες γωνίες) και *ο διπλασιασμός του κύβου* (η κατασκευή ενός κύβου με όγκο διπλάσιο του όγκου ενός δεδομένου κύβου).

- Τα προβλήματα αυτά τα έλυσαν οι Έλληνες, αλλά με μεθόδους που απαιτούσαν τη χρήση καμπυλών που δεν ήταν ευθείες και κύκλοι. Αυτή η παραβίαση των κανόνων δεν έγινε αποδεκτή.

- Μόλις τον 19ο αιώνα αποδείχτηκε ότι οι τρεις κατασκευές είναι αδύνατο να γίνουν με κανόνα και διαβήτη. Οι αποδείξεις χρησιμοποιούσαν αλγεβρικές εικασίες που δεν γνώριζαν οι Έλληνες.

- Το 1837 ο Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1884) απέδειξε ότι η τριχοτόμηση γωνίας 60° είναι αδύνατη. Σχεδόν 50 χρόνια αργότερα, το 1882, ο Ferdinand Lindemann (1852 - 1939) απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός. Αυτό απέδειξε ότι είναι αδύνατο να κατασκευαστεί ένα τμήμα με μήκος π ή $\sqrt{\pi}$. Επομένως, δεν μπορούμε να τετραγωνίσουμε τον κύκλο.

- Ο «τετραγωνισμός του κύκλου» είναι μια φράση που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα για ένα ιδιαίτερα δυσεπίλυτο πρόβλημα. Με την αυστηρή έννοια των όρων, η σημασία της φράσης αφορά ένα μη επιλύσιμο πρόβλημα.

3,14159....

Then he made the sea of cast metal.
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
π = ? > 3; 1 Kings 7:23 III 3+10/70...3+10/71 III 22/7 III √10
1/1² + 1/2² + 1/3² + 1/4² + 1/5² + 1/7² + 1/9² + 1/11² ... = π²/6
(1/1)-(1/3)+(1/5)-(1/7)+(1/9)-(1/11)+(1/13) ... = π/4

3,14159...

- Είναι πραγματικά εκπληκτικό: Μετράμε την περίμετρο και τη διάμετρο ενός κύκλου, υπολογίζουμε τον λόγο αυτών των δύο αριθμών και παίρνουμε πάντα το ίδιο αποτέλεσμα για οποιονδήποτε κύκλο. Ο λόγος αυτός ονομάζεται σταθερά π του Αρχιμήδη.

- Το π είναι ένας *άρρητος* αριθμός, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα $\frac{m}{n}$ (τα m και n είναι ακέραιοι αριθμοί). Συνεπώς η δεκαδική του απεικόνιση δεν τελειώνει ποτέ ούτε επαναλαμβάνεται ποτέ. Μια πρώτη εντύπωση δίνει η αρχή της ακολουθίας ψηφίων του π στον πίνακα.

- Στην παρακάτω πρόταση στα αγγλικά, ο αριθμός των γραμμάτων κάθε λέξης αντιπροσωπεύει τα διαδοχικά ψηφία του π: *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics*. Στα ελληνικά αντίστοιχα, υπάρχει η ρήση *«Ἀεί ὁ Θεός ὁ Μέγας γεωμετρεῖ...»*.

- Εκτός από άρρητος, το π είναι και υπερβατικός αριθμός.

- Οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί ονομάζονται *υπερβατικοί*. Οι αριθμοί αυτοί είναι στο σύνολό τους άρρητοι, αλλά δεν ισχύει και το αντίστροφο. Για παράδειγμα, η ρίζα του $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός, αλλά όχι υπερβατικός, αφού αποτελεί τη λύση της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.

- Η λέξη «υπερβατικός» δεν έχει καμία σχέση με μυστήρια. Σημαίνει απλώς ότι οι αριθμοί αυτοί υπερβαίνουν την περιοχή των αλγεβρικών (πολυωνυμικών) εξισώσεων.

- Οι κατασκευές που πραγματοποιούνται με κανόνα και διαβήτη έχουν αντίστοιχες αλγεβρικές περιγραφές. Κάθε μήκος το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί με αυτά τα κλασικά εργαλεία σήμερα ονομάζεται αλγεβρικό. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να προκύψει ως λύση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης του τύπου:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, όπου τα a_n, ... , a_0 είναι όλα ακέραιοι αριθμοί.

- Ο πρώτος λειτουργικός αλγόριθμος για την προσέγγιση του π φαίνεται να αναπτύχθηκε από τον Αρχιμήδη το Συρακούσιο (περίπου 287 π.Χ. - 212 π.Χ.). Σκέφτηκε να εγγράψει κανονικά πολύγωνα 6, 12, 24, ... πλευρών στο εσωτερικό ενός κύκλου, να βρει την περίμετρο κάθε πολυγώνου και να τη διαιρέ-

σει με τη διάμετρο του κύκλου. Έπειτα επανέλαβε τη διαδικασία με περιγεγραμμένα πολύγωνα. Από τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα 96 πλευρών ο Αρχιμήδης κατέληξε στην προσέγγιση:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

- Το π χρησιμοποιείται και στη Βίβλο, χωρίς όμως να λαμβάνονται υπόψη τα δεκαδικά ψηφία, όπως δείχνει το παρακάτω απόσπασμα από το Βιβλίο των Βασιλέων (Βασιλέων Α, 7, 23): «...*καὶ ἐποίησε τὴν θάλασσαν δέκα ἐν πήχει ἀπὸ τοῦ χείλους αὐτῆς ἕως τοῦ χείλους αὐτῆς, στρογγύλον κύκλῳ τὸ αὐτό· πέντε ἐν πήχει τὸ ὕψος αὐτῆς, καὶ συνηγμένοι τρεῖς καὶ τριάκοντα ἐν πήχει ἐκύκλουν αὐτήν*...»

- Κάθε χρόνο γιορτάζουμε δύο διαφορετικές μέρες του π: την 14η Μαρτίου και την 22α Ιουλίου. Μπορείτε να φανταστείτε γιατί;

Τρία σημεία που λείπουν

Καλή τύχη

PECH · IMMER/IMMER ::: GLÜCK · NÜE/
VIELLEICHT ::: DESTINO · GOD LUCK · MERKWÜRDIG · destino · Nie · Pech ::: SÜR · OFF ::
certo · schon wieder ::: PURE COINCIDENCE · GLÜCK ::

Καλή τύχη

- Τα τυχερά παιχνίδια υπήρξαν η αφετηρία της θεωρίας των πιθανοτήτων. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να στρίψουμε ένα νόμισμα ή να ρίξουμε ένα ή περισσότερα ζάρια. Πρώτα όμως θα εξηγήσουμε τι σημαίνει πιθανότητα. *Η πιθανότητα ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος είναι ο λόγος του αριθμού των επιθυμητών αποτελεσμάτων προς τον αριθμό των πιθανών αποτελεσμάτων*.

- Αιώνες τώρα η πιθανότητα διδάσκεται με τη ρίψη ζαριών. Αν ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι, είναι εξίσου πιθανό να εμφανιστεί οποιαδήποτε από τις έξι πλευρές του. Έτσι, για παράδειγμα, η πιθανότητα να βγει 4 είναι μία στις έξι, δηλαδή η πιθανότητά του είναι $\frac{1}{6}$. Αυτό δεν εγγυάται ότι το 4 θα εμφανιστεί ακριβώς μία φορά, αν ρίξουμε το ζάρι έξι φορές. Ωστόσο, *ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών* αναφέρει ότι, αν ρίξουμε το ζάρι 100 ή 1.000 ή 1.000.000 φορές, ο αριθμός 4 θα τείνει να εμφανιστεί τόσες φορές που θα προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο το $\frac{1}{6}$ του αριθμού συνολικών ρίψεων.

- Η πιθανότητα να εμφανιστεί πρώτος αριθμός κατά τη ρίψη ενός ζαριού είναι $\frac{1}{2}$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί;

- Η πιθανότητα εμφάνισης συγκεκριμένης ακολουθίας n αριθμών είναι $\frac{1}{6^n}$.

- Για παράδειγμα, η πιθανότητα να προκύψει 2 μετά από 5 είναι $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

- Αν χρησιμοποιήσουμε δύο ζάρια, η κατάσταση αλλάζει ελαφρώς. Επειδή κάθε ζάρι μπορεί να πέσει με έξι διαφορετικούς τρόπους, υπάρχουν 36 (= 6*6) πιθανοί συνδυασμοί. Μπορούμε να έχουμε σύνολο 4, για παράδειγμα, με 1 και 3 ή 3 και 1 ή 2 και 2. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα να έχουμε σύνολο 4 είναι $\frac{1}{36} = \frac{1}{12}$. Η πιθανότητα να προκύψει 7 είναι, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει 12 είναι μόλις $\frac{1}{36}$.

- Ας συνοψίσουμε: η πιθανότητα είναι το μέτρο του πιθανού να συμβεί ένα γεγονός. Προσδιορίζεται ποσοτικά ως ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και το 1, με το 0 να υποδεικνύει το απίθανο και το 1 το βέβαιο. Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ενός γεγονότος, τόσο πιθανότερο είναι να συμβεί το γεγονός.

- Ο καλλιτέχνης Eugen Jost αποδεικνύεται δυνατός παίκτης, καθώς πρόκειται να ρίξει ζάρια δημιουργώντας ταυτόχρονα ένα έργο τέχνης. Ξεκινά με ένα πλέγμα 21x21, στο οποίο το τετράγωνο επάνω αριστερά σηματοδοτεί την αρχή, ενώ το κεντρικό τετράγωνο με την υπογραφή του Jost σηματοδοτεί το τέλος. Τα υπόλοιπα 439 τετράγωνα είναι ζωγραφισμένα με έξι διαφορετικά χρώματα. Για να χρωματίσει αυτά τα τετράγωνα ο Jost, χρησιμοποιεί ένα ζάρι του οποίου οι έξι πλευρές έχουν ακριβώς αυτά τα χρώματα. Ξεκινώντας στην πρώτη σειρά μετά το εισαγωγικό βέλος, ο Jost ρίχνει το ζάρι 439 φορές, προκειμένου να αποφασίσει με τι χρώμα θα χρωματίσει κάθε τετράγωνο. Ακολουθώντας σπειροειδή πορεία συνεχίζει προς το κέντρο. Έπειτα κάνει το ίδιο ρίχνοντας το ζάρι 439 φορές, για να προσδιορίσει έναν αριθμό από το 1 έως το 6 που θα γράψει με τη μορφή αριθμού ή με λατινική μορφή ή θα αναπαραστήσει με τελείες ή γραμμές σε κάθε τετράγωνο.
  Στην πραγματικότητα η δημιουργία αυτού του πίνακα αποτελεί ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας. Ο καλλιτέχνης αποφασίζει μόνο τα έξι διαφορετικά χρώματα των τετραγώνων και την εμφάνιση των αριθμών.

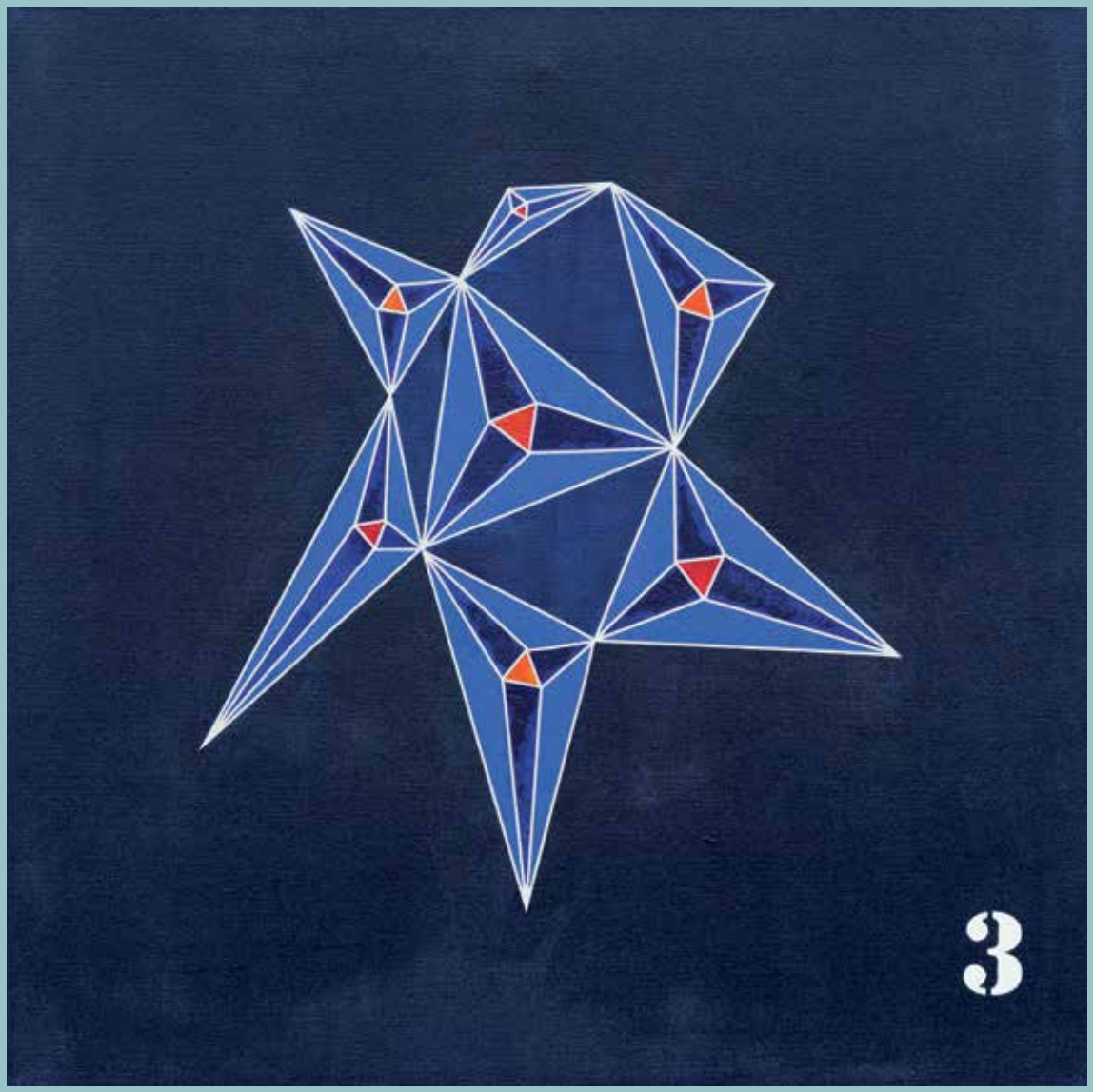
- Περίπου το 1654 ο Antoine Gombaud (1607 - 1684), περισσότερο γνωστός ως Chevalier de Mere, πρότεινε στον μαθηματικό Blaise Pascal (1623 - 1662) ένα πρόβλημα που αφορά ένα παιχνίδι. Συγκεκριμένα, ένα τυχερό παιχνίδι με δύο παίκτες, οι οποίοι έχουν ίδιες πιθανότητες να κερδίσουν κάθε γύρο. Οι παίκτες συνεισφέρουν εξίσου στο χρηματικό βραβείο και συμφωνούν προκαταβολικά ότι ο πρώτος παίκτης που θα κερδίσει ένα συγκεκριμένο αριθμό γύρων θα κερδίσει ολόκληρο το βραβείο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το παιχνίδι διακόπτεται από εξωτερικούς παράγοντες, πριν προλάβει να κερδίσει κάποιος παίκτης. Πώς μοιράζεται δίκαια το χρηματικό βραβείο;

- Ο Pascal συζήτησε το πρόβλημα στη συνεχή αλληλογραφία του με τον Pierre de Fermat (1607 - 1665). Στη διάρκεια των συζητήσεών τους, οι Pascal και Fermat δεν βρήκαν μόνο μια πειστική, συνεπή λύση στον επιμερισμό του χρηματικού βραβείου, αλλά ανέπτυξαν και έννοιες που εξακολουθούν να είναι θεμελιώδεις για τις πιθανότητες στις μέρες μας.

- Η αρχική σκέψη των Pascal και Fermat ήταν ότι ο επιμερισμός δεν θα εξαρτιόταν τόσο από το ιστορικό της παρτίδας που είχε παιχτεί, πριν διακοπεί το παιχνίδι, αλλά περισσότερο από τους πιθανούς τρόπους συνέχισης του παιχνιδιού, αν αυτό δεν είχε διακοπεί. Σε μια σειρά επιστολών, οι δύο μαθηματικοί έθεσαν τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας των πιθανοτήτων.

- Στην Ευρώπη, το ζήτημα των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε για πρώτη φορά επίσημα τον 16ο αιώνα με το έργο του Gerolamo Cardano (1501 - 1576), ο οποίος εστίασε σε αυτόν τον κλάδο των μαθηματικών κυρίως λόγω της χαρτοπαικτικής του συνήθειας. Το 1525 δημοσίευσε ένα βιβλίο με τίτλο *Liber de ludo aleae* (Βιβλίο περί τυχερών παιγνίων).

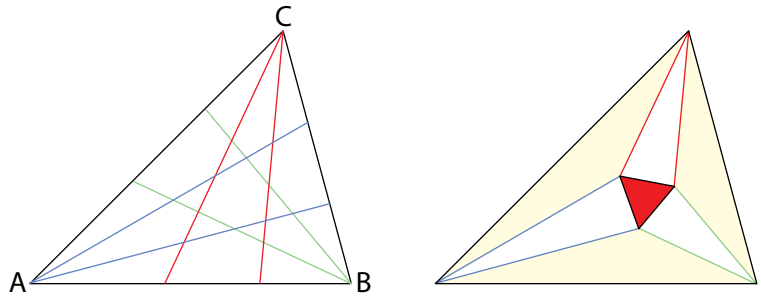
Το «Θαύμα» του Morley


3

Το «θαύμα» του Morley

- Η γνώση μας σχετικά με τα τρίγωνα δεν προέρχεται στο σύνολό της από τα γραπτά της αρχαιότητας. Το 1899 λοιπόν ο μαθηματικός Frank Morley (1860 - 1937) ανακάλυψε ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα, που προφανώς είχαν παραβλέψει οι αρχαίοι γεωμέτρες. Οι συνάδελφοί του ενθουσιάστηκαν τόσο που μίλησαν ακόμα και για το *θαύμα του Morley*.

- Τι είναι λοιπόν αυτό το θαύμα; Πάρτε οποιοδήποτε τρίγωνο ABC και σχεδιάστε δύο γραμμές που να περνούν από κάθε κορυφή, έτσι ώστε κάθε εσωτερική γωνία να διαιρείται σε τρία ίσα μέρη (τριχοτόμοι γωνίας). Εξετάστε τώρα τις δύο τριχοτόμους γωνίας που εφάπτονται στην πλευρά AB και δείτε ότι συναντιούνται σε ένα σημείο. Ομοίως, οι τριχοτόμοι που εφάπτονται στην πλευρά BC και αυτοί που εφάπτονται στην πλευρά CA συναντιούνται σε ένα σημείο. Αυτά τα τρία σημεία τομής σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο (τρίγωνο του Morley).



Θεώρημα του Morley:
Σε οποιοδήποτε τρίγωνο οι τριχοτόμοι των γωνιών που βρίσκονται κοντά στις πλευρές τέμνονται σε ισόπλευρο τρίγωνο.

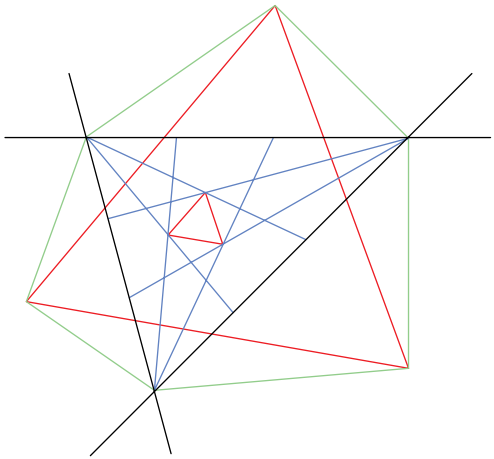
- Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας παρέχει μια πρώτη εντύπωση ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα τρίγωνα. Η ίδια η απόδειξη είναι κάπως δύσκολη. Η ομορφιά όμως του θεωρήματος του Morley έγκειται στην απλότητα της πρότασης.

- Ξεκινώντας το 1900, ο Frank Morley ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο Johns Hopkins στη Βαλτιμόρη (Μέριλαντ). Ήταν εξαιρετικός σκακιστής και κατά-

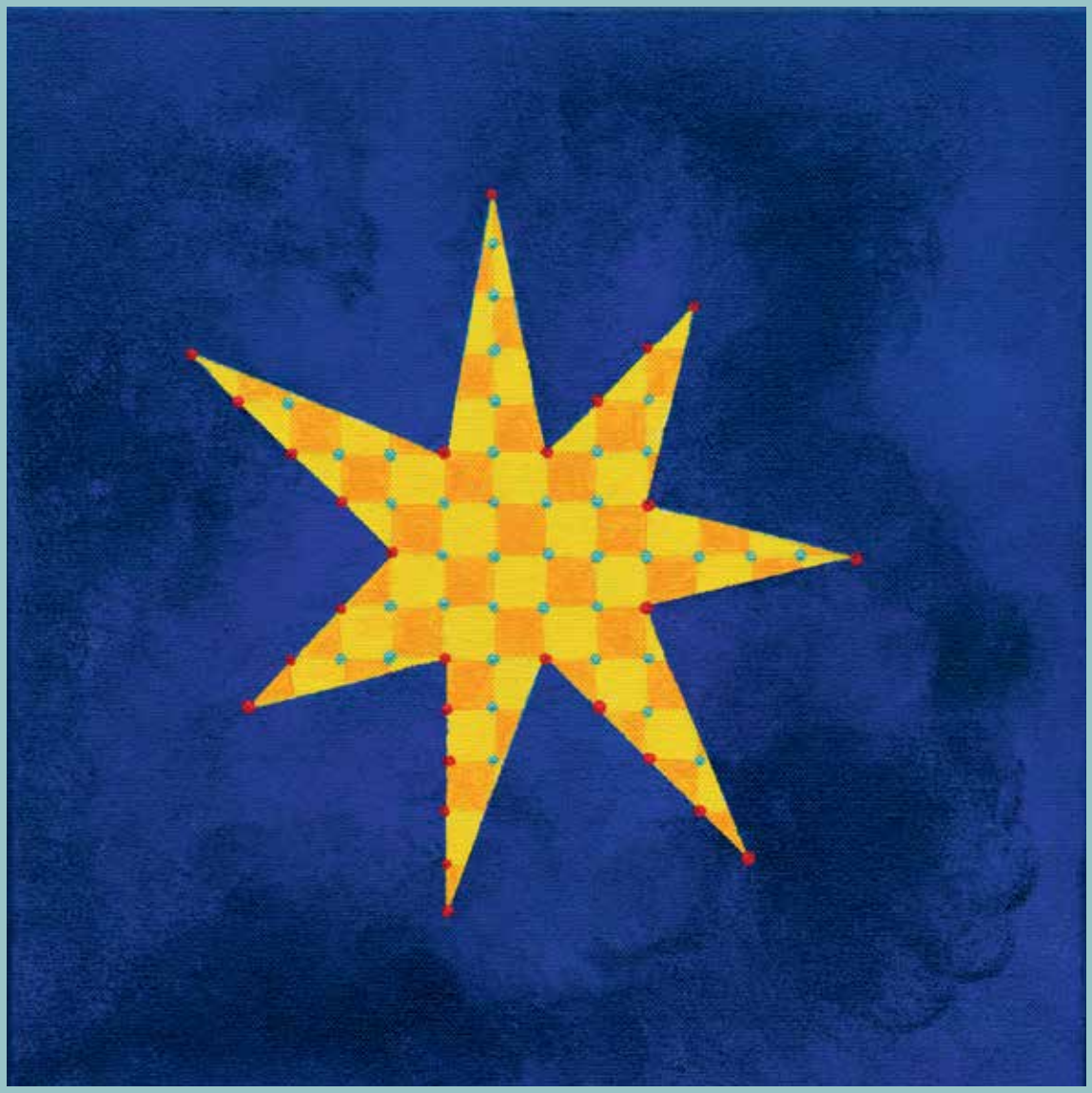
φερε ακόμα και να νικήσει μία φορά τον παγκόσμιο πρωταθλητή Emanuel Lasker (1868 - 1941), που ήταν επίσης μαθηματικός. Αφού ολοκλήρωσε το διδακτορικό του στο Πανεπιστήμιο του Ερλάνγκεν, ο Lasker επιδίωξε να ακολουθήσει ακαδημαϊκή καριέρα. Δεν τα κατάφερε όμως στην Ευρώπη ούτε στις ΗΠΑ και τελικά έγινε επαγγελματίας σκακιστής.

- Με διαβήτη και κανόνα ένα δεδομένο τμήμα μπορεί να διχοτομηθεί, τριχοτομηθεί, τετραχοτομηθεί, κ.λπ. Τώρα όμως εξετάζουμε γωνίες και τα πράγματα είναι διαφορετικά. Οποιαδήποτε γωνία μπορεί να διχοτομηθεί με διαβήτη και κανόνα, αλλά μόνο ορισμένες γωνίες μπορούν να τριχοτομηθούν. Για παράδειγμα, η τριχοτόμηση γωνίας 90° είναι εύκολη. Αυτό ίσως είναι η αιτία που οι αρχαίοι γεωμέτρες δεν ανακάλυψαν το θεώρημα του Morley. Επειδή δεν μπόρεσαν να τριχοτομήσουν μια αυθαίρετη γωνία, παρέβλεψαν τα προβλήματα της τριχοτόμησης γωνίας!

- Αντί για τις εσωτερικές γωνίες, μπορείτε να εξετάσετε τις εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου και το θεώρημα του Morley ισχύει και πάλι. Αν τριχοτομήσετε τις εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου, τα ζεύγη των εξωτερικών τριχοτόμων που εφάπτονται στις πλευρές AB, BC και CA συναντιούνται σε ένα σημείο αντίστοιχα.



Λαμπερή έναστερη νύχτα



Λαμπερή έναστρη νύχτα

- Είναι μια έναστρη νύχτα. Κοιτάζουμε ένα λαμπερό αστέρι στον βαθύ μπλε ουρανό. Πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η επιφάνειά του; Παρατηρούμε ότι το ξεχωριστό μας αστέρι είναι ενσωματωμένο σε ένα πλέγμα με τις κορυφές και τα σημειωμένα σημεία του να βρίσκονται ακριβώς πάνω σε σημεία του πλέγματος. Το να μετρήσουμε τα τετράγωνα δεν έχει νόημα σε αυτήν την περίπτωση, επειδή πολλά τετράγωνα δεν βρίσκονται ολόκληρα μέσα στο αστέρι. Υπάρχει όμως μια ειδική μέθοδος προσδιορισμού του εμβαδού, η οποία απαιτεί μόνο τη μέτρηση των σημείων του πλέγματος.

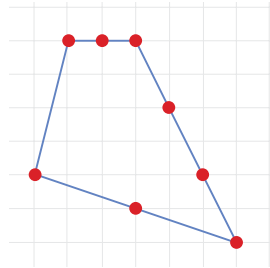
- Αυτό ακούγεται φανταστικό και είναι και αποτελεσματικό χωρίς να περιορίζεται σε αστεροειδή σχήματα. Ας δούμε λίγο καλύτερα αυτήν τη μέθοδο. Σχεδιάζουμε λοιπόν ένα απλό πολύγωνο σε ένα τετράγωνο πλέγμα, έτσι ώστε όλες οι κορυφές του πολύγωνου να είναι σημεία του πλέγματος. Τα σημεία του πλέγματος μέσα στο σχήμα είναι σημαντικά, όπως επίσης και όλα τα σημεία του πλέγματος πάνω στο περίγραμμα, πέραν των κορυφών. Το εμβαδόν του πολυγώνου υπολογίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα:

- Υπολογίζουμε τον αριθμό των σημείων i στο εσωτερικό του σχήματος. Προσθέτουμε το μισό του αριθμού των σημείων b πάνω στο περίγραμμα. Έπειτα αφαιρούμε 1 από αυτό το άθροισμα.

  Πρόκειται για τον επονομαζόμενο τύπο του Pick: $\textit{Εμβαδόν} = i + \frac{b}{2} - 1$

  Πάρτε για παράδειγμα το παρακάτω πολύγωνο. Σε αυτό το πολύγωνο i = 16 (μπλε σημεία) και b = 8 (κόκκινα σημεία). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Pick έχουμε:

$$\text{Εμβαδόν} = 16 + \frac{8}{2} - 1 = 19$$

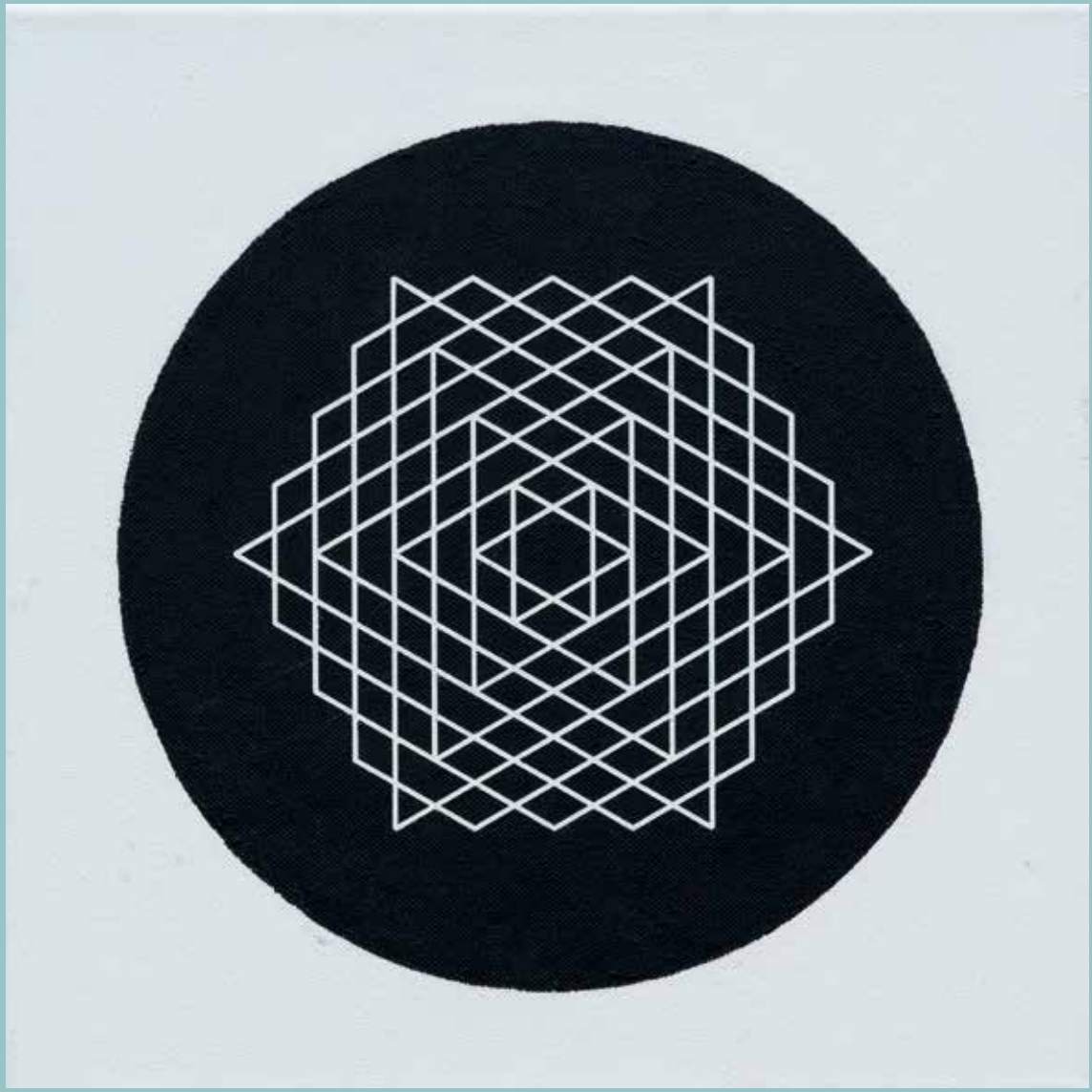


- Ο τύπος του Pick είναι χρήσιμος για τον υπολογισμό ή την προσέγγιση του εμβαδού μιας περιοχής ακανόνιστου σχήματος. Πρώτα πρέπει να βάλουμε το σχήμα σε ένα πλέγμα και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο. Έτσι έχουμε το ακριβές εμβαδόν μόνο ενός πολυγώνου του οποίου οι κορυφές είναι σε σημεία του πλέγματος. Με άλλα λόγια ο τύπος του Pick προσεγγίζει το εμβαδόν ενός πολυγώνου.

- Ο Αυστριακός μαθηματικός Georg Alexander Pick (1859 - 1942) δημοσίευσε αυτόν τον τύπο το 1899. Κατά το μεγαλύτερο μέρος του ακαδημαϊκού του βίου υπήρξε καθηγητής στο Γερμανικό Πανεπιστήμιο της Πράγας. Με το φίλο του Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879 - 1955) μοιράζονταν το ίδιο πάθος για την επιστήμη και τη μουσική. Το πολιτικό κλίμα στα τέλη της δεκαετίας του 1930 επισκίασε τα τελευταία χρόνια της ζωής του Pick. Ως Εβραίος συνελήφθη και απελάθηκε στο στρατόπεδο συγκέντρωσης Τερέζιενσταστ, όπου πέθανε το 1942.

- Μαθηματικές ασκήσεις:
  – Προσδιορίστε το εμβαδόν του αστεριού στον πίνακα του Jost.
  – Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Pick, για να δείξετε ότι δεν μπορείτε να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε ένα πλέγμα, έτσι ώστε κάθε κορυφή να είναι πάνω σε ένα σημείο του πλέγματος.

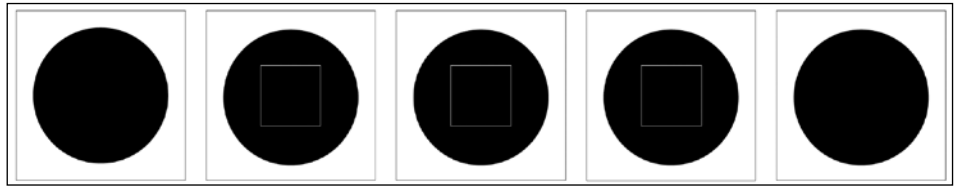
«Εμβυθιζόμενος» κύβος

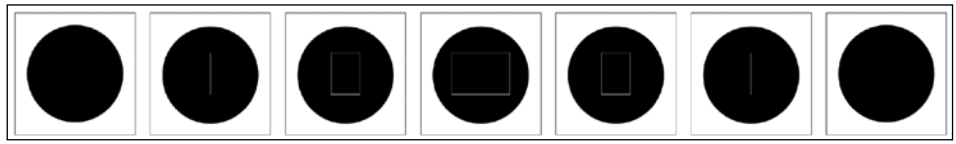


«Εμβυθιζόμενος» κύβος Ι

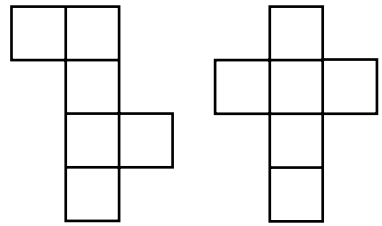
- Τι σχέδια μπορούν να σχηματιστούν στην επιφάνεια μιας κούπας καφέ, αν βυθίσουμε σε αυτήν έναν συμπαγή κύβο; Τα σχέδια εξαρτώνται βέβαια από το πώς έρχεται σε επαφή ο κύβος με τη μαλακή επιφάνεια.
  Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: Η πρώτη επαφή με την επιφάνεια γίνεται είτε με έδρα ή κορυφή ή ακμή του κύβου. Η παρακάτω ακολουθία εικόνων δείχνει ορισμένα «στιγμιότυπα» από διάφορα βάθη εμβύθισης στις τρεις περιπτώσεις. Η πρώτη εικόνα είναι ένα είδος συνδυασμού αρκετών από αυτά τα στιγμιότυπα.

«Εμβυθιζόμενος» κύβος ΙΙ



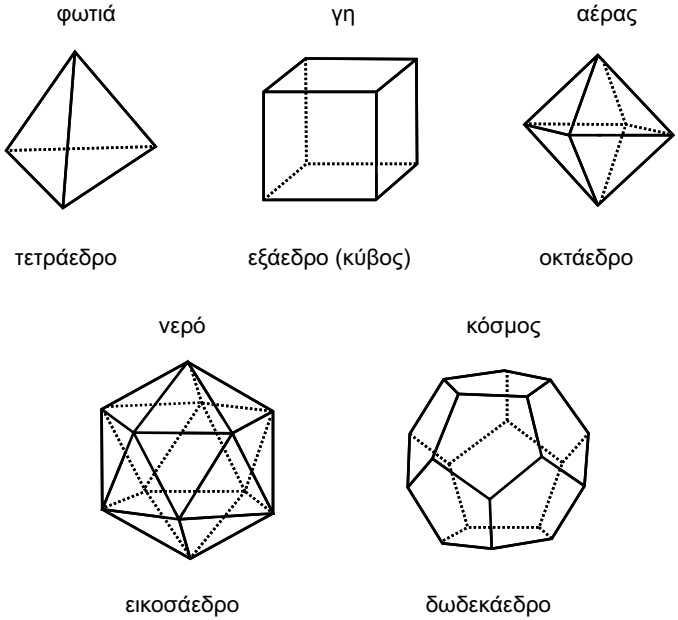


- Αν «ξεδιπλώσουμε» έναν κύβο, το αποτέλεσμα είναι ένα «δίκτυο» ενωμένων πανομοιότυπων τετραγώνων. Τα δίκτυα (αναπτύγματα) διαφέρουν ανάλογα με τις ακμές του κύβου που κόβουμε, για να τον ξεδιπλώσουμε. Δείτε τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν:



Δύο δίκτυα είναι διαφορετικά, αν δεν μπορούμε να κάνουμε το ένα σαν το άλλο με ανάκλαση ή περιστροφή. Συνολικά μπορούμε να βρούμε 11 διαφορετικά δίκτυα σε έναν κύβο. Τώρα δύο ενέργειες έμειναν να κάνουμε: (1) Να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα δίκτυα. (2) Να δείξουμε ότι υπάρχουν μόνο αυτά τα 11 δίκτυα.

- Ο κύβος είναι το πιο γνωστό πλατωνικό στερεό. Τα στερεά αυτά είναι κυρτά τρισδιάστατα πολύεδρα αντικείμενα των οποίων οι έδρες είναι όλες πανομοιότυπα κανονικά πολύγωνα (πλευρές ίσου μήκους και γωνίες ίσων μοιρών). Επιπλέον, ο ίδιος αριθμός εδρών συναντάται σε κάθε κορυφή. Οι αρχαίοι Έλληνες αναγνώρισαν και απέδειξαν ότι υπάρχουν μόνο πέντε πλατωνικά στερεά:



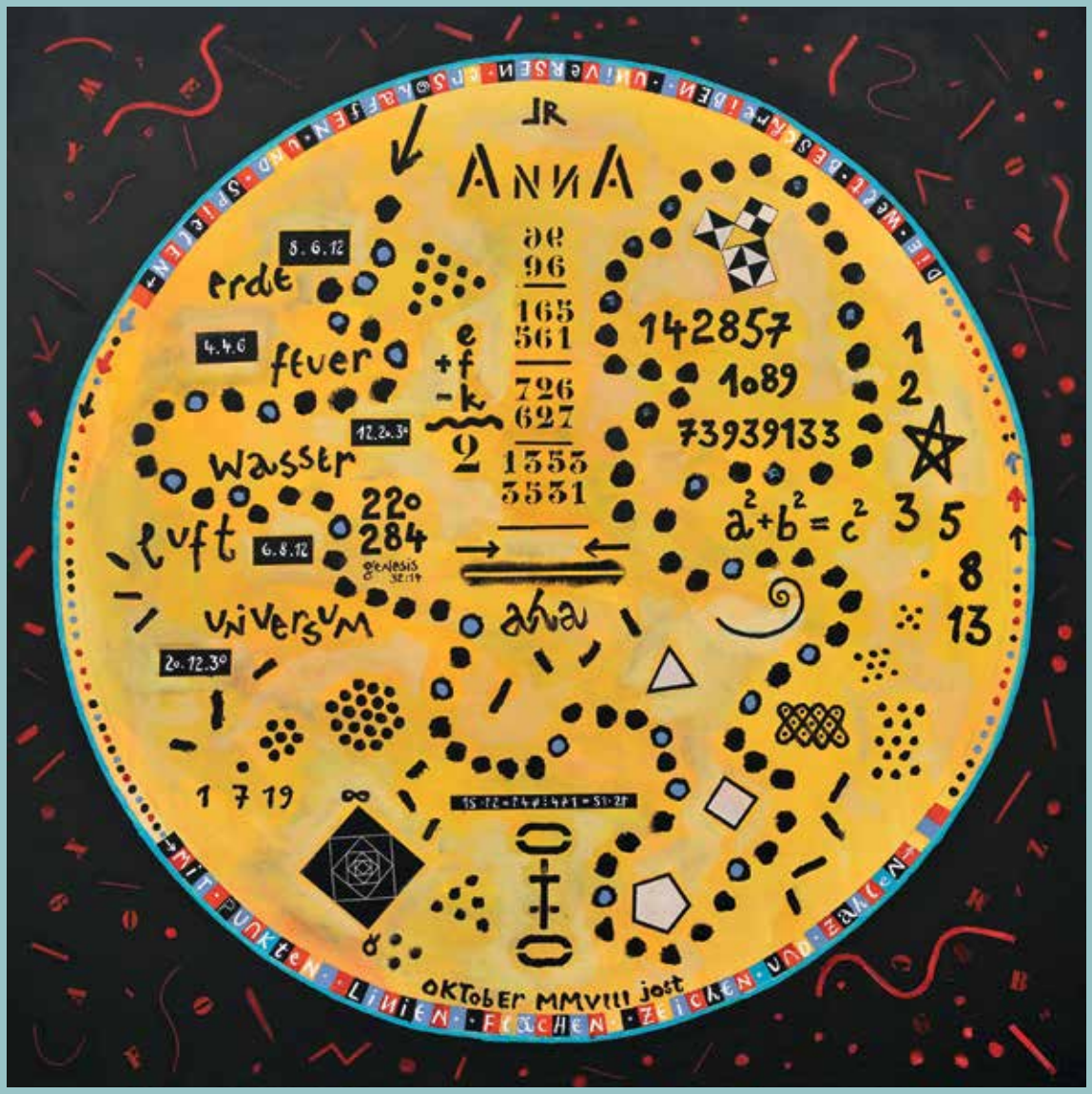
- Ο Πλάτωνας (περίπου 428 π.Χ. - περίπου 348 π.Χ.) είχε συγκλονιστεί από την ομορφιά και τη συμμετρία τους. Σύμφωνα με τους αρχαίους φιλοσόφους, αυτά τα πέντε κανονικά στερεά αποτελούν τη βάση μιας πρώιμης ατομικής θεωρίας της ύλης. Υποστήριξαν ότι τα τέσσερα βασικά στοιχεία (φωτιά, αέρας, νερό, γη) αποτελούνταν στο σύνολό τους από μικροσκοπικά στερεά (άτομα) και αντιστοίχισαν σε καθένα από αυτά ένα κανονικό στερεό. Το δωδεκάεδρο που περισσεύει αντιπροσωπεύει ολόκληρο το σύμπαν.

- Ο Γερμανός αστρονόμος Johannes Kepler (1571 - 1630) κατασκεύασε μοντέλα πλατωνικών στερεών το ένα μέσα στο άλλο, σε μια προσπάθεια να περιγράψει τις τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Παρόλο που οι θεωρίες του Kepler ήταν εσφαλμένες, ο ίδιος ήταν από τους πρώτους επιστήμονες που επέμειναν στη γεωμετρική ερμηνεία των ουράνιων φαινομένων.

- Ο διπλασιασμός του κύβου (ή αλλιώς το «Δήλιο πρόβλημα») είναι ένα από τα τρία κλασικά προβλήματα της αρχαιότητας. Το πρόβλημα αυτό δεν επιλύεται με τον διπλασιασμό των ακμών του κύβου, γιατί αυτή η διαδικασία αυξάνει τον όγκο του οκτώ φορές. Τι πρέπει να κάνουμε: Έχουμε έναν κύβο

με μήκος ακμής a και πρέπει να δημιουργήσουμε μια νέα ακμή μήκους x, έτσι ώστε $x^3 = 2a^3$. Φυσικά επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα εργαλεία του Πλάτωνα για την κατασκευή: κανόνα και διαβήτη.
Επί περίπου δύο χιλιάδες χρόνια, οι μαθηματικοί δεν κατάφεραν να λύσουν αυτό το πρόβλημα και το 1837 ο Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) απέδειξε ότι αυτό είναι αδύνατο. Με τη χρήση αλγεβρικών μεθόδων που δεν είχαν στη διάθεσή τους οι Έλληνες, όρισε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες μια γεωμετρική κατασκευή, μεταφρασμένη σε ένα σύνολο εξισώσεων, μπορούσε να επιτευχθεί με πλατωνικά εργαλεία. Ο διπλασιασμός του κύβου οδηγεί στην εξίσωση $x = \sqrt[3]{2}a$, έναν αριθμό που δεν «κατασκευάζεται».

Συμμετρία


ANNA
8.6.12
erde
4.4.6
feuer
12.2.3°
wasser
luft
6.8.12
universum
20.12.3°
1 7 19
96
165
561
726
627
1355
3531
e
+f
-k
142857
1089
73939133
1
2
3 5
8
13
a²+b²=c²
220
284
genesis
aha
oktober MMVIII jost
die welt besteht aus sonnen und sternen
mit punkten linien flächen zeichen und zahlen

Συμμετρία

- Στην καθημερινή χρήση της γλώσσας η ελληνικής προέλευσης *συμμετρία* αναφέρεται σε μια αίσθηση αρμονικών και όμορφων αναλογιών. Στα μαθηματικά, η συμμετρία έχει έναν πιο ακριβή ορισμό: ένα αντικείμενο είναι συμμετρικό, αν παραμένει αναλλοίωτο κατόπιν διάφορων μετασχηματισμών, π.χ. κατόπιν ανάκλασης, περιστροφής, κ.λπ.

- Ένα γεωμετρικό αντικείμενο έχει συμμετρία, αν υπάρχει ένας μετασχηματισμός που σχηματίζει το σχήμα ή το αντικείμενο πάνω στον εαυτό του. Υπάρχουν αρκετά είδη συμμετρίας, όπως η κατοπτρική συμμετρία (καθρέπτης), η περιστροφική συμμετρία, η συμμετρία μετατόπισης, η σημειακή ανάκλαση και η ολισθανάκλαση.

- Το παλίνδρομο (από τις λέξεις πάλιν και δρόμος) είναι ένα ωραίο παράδειγμα μιας ιδιαίτερης συμμετρίας. Είναι μια λέξη, ένας αριθμός ή άλλη αλληλουχία χαρακτήρων που διαβάζονται το ίδιο από την αρχή προς το τέλος και από το τέλος προς την αρχή, π.χ. *Άννα, Νίψον ανομήματα μη μόναν όψιν ή 4884*.

- Μπορούν να προκύψουν και μεγαλύτερα παλίνδρομα, αν παραβλέψουμε τα κεφαλαία, τους τόνους και τις παύλες. Στα αγγλικά μερικά παραδείγματα είναι τα: «Madam, I'm Adam», «Never odd or even», «A man, a plan, a canal, - Panama».

- Το παρακάτω παλίνδρομο αποδίδεται στον αυτοκράτορα Ναπολέοντα, παρότι αμφισβητείται η πιθανότητα να γνώριζε τόσο καλά αγγλικά για κάτι τέτοιο:

  ABLE I WAS ERE I SAW ELBA

- Ο εξαιρετικός μαθηματικός Peter Hilton (1923 - 2010) δημιούργησε ένα από τα μεγαλύτερα παλίνδρομα παγκοσμίως (51 γράμματα):

  DOC, NOTE: I DISSENT. A FAST NEVER PREVENTS A FATNESS.
  I DIET ON COD.

- Πάρτε οποιονδήποτε αριθμό και προσθέστε τον σχετικό παλίνδρομό του (τα ψηφία με αντίστροφη σειρά). Προσθέστε σε αυτό το άθροισμα τον σχετικό παλίνδρομο. Επαναλάβατε τη διαδικασία, μέχρι να προκύψει παλίνδρομος.

Μέχρι σήμερα δεν γνωρίζουμε αν αυτή η διαδικασία οδηγεί πάντα σε παλίνδρομο. Ο αριθμός 196, για παράδειγμα, παραμένει μυστήριο.

- Οι αριθμοί 220 και 284 είναι το μικρότερο ζεύγος *φίλιων αριθμών*. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις, για να είναι δύο αριθμοί φίλιοι; Δύο αριθμοί ονομάζονται φίλιοι, αν ο καθένας ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. (Γνήσιος διαιρέτης ενός αριθμού είναι κάθε θετικός αριθμός που διαιρεί ακριβώς αυτόν τον αριθμό εκτός του εαυτού του).
  Οι 220 και 284 είναι φίλιοι αριθμοί, επειδή οι γνήσιοι διαιρέτες του 220 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 και 110, οι οποίοι έχουν άθροισμα 284. Οι γνήσιοι διαιρέτες του 284 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 71 και 142, οι οποίοι έχουν άθροισμα 220.
  Άλλα παραδείγματα φίλιων αριθμών είναι τα παρακάτω ζεύγη: 1184 και 1210, 2620 και 2924, και 5020 και 5564.
  Οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν ήδη τους φίλιους αριθμούς. Ένας πρώτος γενικός τύπος για την εύρεση ορισμένων τέτοιων ζευγών δημοσιεύτηκε το 850 από τον Ιρακινό μαθηματικό Thabit ibn Qurra (826 - 911).

- Η αριθμητική τριάδα 8, 6, 12 περιλαμβάνει τους βασικούς αριθμούς που χαρακτηρίζουν έναν κύβο. Ο κύβος αποτελείται από 8 κορυφές, 6 έδρες και 12 ακμές. Σύμφωνα με τη θεωρία του Εμπεδοκλή (περίπου 490 π.Χ. - περίπου 430 π.Χ.), ο κύβος συμβολίζει τη Γη λόγω της στέρεης κατασκευής του. Ποια πλατωνικά στερεά αντιστοιχούν στις αριθμητικές τριάδες α) 4, 4, 6, β) 12, 20, 30, γ) 6, 8, 12 και δ) 20, 12, 30; Καθένα από τα παρακάτω σχέδια αναπαριστά την προβολή ενός πλατωνικού στερεού σε επίπεδη επιφάνεια (επονομαζόμενο διάγραμμα Schlegel).

- Η εξίσωση V - E + F = 2 είναι γνωστή ως *τύπος του Euler για τα πολύεδρα*. Όλες οι παραπάνω αριθμητικές τριάδες επαληθεύουν αυτήν την εξίσωση, όπου V είναι ο αριθμός των κορυφών, E, ο αριθμός των ακμών και F, ο αριθμός των εδρών.
  Ο τύπος αυτός ανακαλύφθηκε ξανά και αποδείχτηκε από το διάσημο Ελβετό μαθηματικό Leonhard Euler (1707 - 1783). Ήταν ήδη γνωστός στο Γάλλο φιλόσοφο και μαθηματικό Καρτέσιο (1596 - 1650). Ορισμένοι ιστορικοί μάλιστα συνδέουν τον τύπο αυτό με τον Αρχιμήδη (περίπου 287 π.Χ. - 212 π.Χ.).

Άπειρο Ι

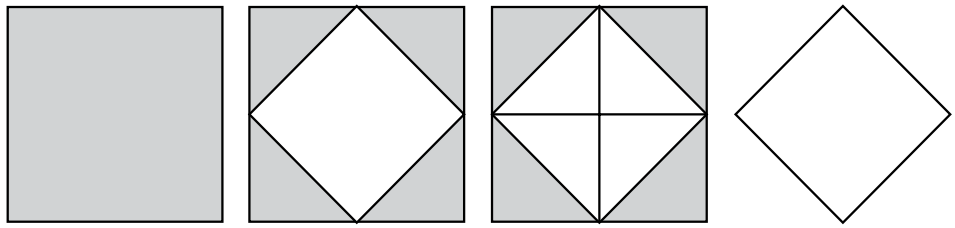
Άπειρο I

«Το άπειρο είναι ένα τετράγωνο χωρίς κορυφές». (Κινέζικο ρητό)

- Το ρητό αυτό περιγράφει την υποκείμενη δομή του πίνακα. Τα μέσα των πλευρών του πρώτου μεγάλου τετραγώνου είναι οι κορυφές ενός νέου τετραγώνου. Αυτό σημαίνει ότι «αποκόπτουμε» τις κορυφές του πρώτου τετραγώνου. Τώρα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο δεύτερο τετράγωνο, και ούτω καθεξής. Ενώ τα τετράγωνα γίνονται ολοένα και μικρότερα, η διαδικασία δεν τελειώνει ποτέ.

- Ο ιωνικής καταγωγής φιλόσοφος και αστρονόμος Αναξαγόρας (περίπου 500 π.Χ. - 428 π.Χ.) πιστεύει *πως δεν υπάρχουν στοιχεία που θα μπορούσαν να θεωρηθούν τα μικρότερα δυνατά ούτε τα μεγαλύτερα δυνατά, αλλά πάντα υπάρχει κάτι μικρότερο και κάτι μεγαλύτερο*.
  Αυτός ο τρόπος που φαντάστηκε το άπειρο οπτικοποιείται στον πίνακα του Jost. Τα τετράγωνα μπορούν να συνεχιστούν και προς τις δύο κατευθύνσεις, μειώνοντας ή αυξάνοντας το μέγεθός τους.

- Τώρα θα μελετήσουμε το εμβαδόν των τετραγώνων. Το εμβαδόν γίνεται μισό, όταν πηγαίνουμε από το ένα τετράγωνο στο επόμενο μικρότερο. Τα παρακάτω σχέδια δείχνουν τη μετάβαση:



- Έστω ότι το εμβαδόν του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι 1. Ποιο είναι το άθροισμα των εμβαδών όλων των τετραγώνων; Προκύπτει το παρακάτω άθροισμα

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

  Μπορεί να αποδειχτεί ότι η τιμή αυτού του αθροίσματος ισούται με 2. Εκ πρώτης είναι εντυπωσιακό που ένα άπειρο άθροισμα μπορεί να έχει μια πεπερασμένη τιμή.

- Για να το καταλάβουμε καλύτερα, ας δούμε την παρακάτω κατάτμηση:

$$2=1+1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\ \ldots$$

Εφόσον $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, ... έχουμε την άπειρη σειρά των αντίστροφων της δύναμης του 2, βήμα-βήμα:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$$

Παρεμπιπτόντως, η σειρά στην οποία κάθε όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον προηγούμενο με μια σταθερά ονομάζεται γεωμετρική σειρά. Όπως προαναφέρθηκε, αυτή η ιδιαίτερη σειρά έχει την τιμή 2.

- Αν αλλάξουμε τη βάση με τον εκθέτη στον παρονομαστή της παραπάνω άπειρης σειράς, παίρνουμε άλλη μία άπειρη σειρά με πεπερασμένη τιμή:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

- Ο προσδιορισμός αυτού του αθροίσματος προβλημάτισε τους μαθηματικούς, ιδιαίτερα το πρώτο μισό του 18ου αιώνα. Το 1736 ο Leonhard Euler (1707 - 1783) απέδειξε ότι η τιμή αυτού του αθροίσματος των αντίστροφων των τετραγώνων θετικών ακεραίων ισούται με $\frac{\pi^2}{6}$.

- Ένα διάσημο παράδειγμα αυτής της σύνδεσης είναι το παράδοξο του Έλληνα φιλοσόφου Ζήνωνα του Ελεάτη (περίπου 490 π.Χ. - περίπου 430 π.Χ.). Πρόκειται για την ιστορία ενός αγώνα δρόμου ανάμεσα στον ήρωα Αχιλλέα και μια χελώνα. Η χελώνα παίρνει προβάδισμα 100 μέτρα από τον Αχιλλέα. Υποθέτουμε ότι καθένας από τους αθλητές μας ξεκινά να τρέχει με ορισμένη σταθερή ταχύτητα, ο ένας πολύ γρήγορα και ο άλλος αρκετά αργά. Μετά από ορισμένο χρόνο, ο Αχιλλέας θα έχει τρέξει 100 μέτρα και θα φτάσει το σημείο αφετηρίας της χελώνας. Σε αυτό το διάστημα, η χελώνα έχει τρέξει μια πολύ μικρότερη απόσταση, ας πούμε, 10 μέτρα. Έτσι ο Αχιλλέας θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο, για να καλύψει αυτήν την απόσταση, διάστημα κατά το οποίο η χελώνα θα έχει προχωρήσει περαιτέρω, και ούτω καθεξής. Συνεπώς, κάθε φορά που ο Αχιλλέας φτάνει κάπου από όπου έχει περάσει η χελώνα, πάντα θα απέχει κάποια απόσταση από τη χελώνα. Στην πραγματικότητα, δεν καταφέρνει να περάσει τη χελώνα. Παράξενο, ε;

Άπειρο II

2048 j

Άπειρο ΙΙ

- Ο πίνακας δείχνει τη διαρκή διχοτόμηση ενός τετραγώνου εμβαδού 1. Η διαδικασία αυτή δείχνει περιγραφικά ότι το άθροισμα ενός άπειρου αριθμού θετικών ακεραίων μπορεί να έχει πεπερασμένη τιμή.

Ξεκινάμε με ένα τετράγωνο εμβαδού 1 και κατατέμνουμε το εμβαδόν στη μέση. Προκύπτουν δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}$. Μετά διχοτομούμε το λευκό τρίγωνο και προκύπτουν δύο μικρότερα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα, καθένα από τα οποία έχει εμβαδόν $\frac{1}{4}$. Έπειτα διχοτομούμε και πάλι το νέο λευκό τρίγωνο, και ούτω καθεξής.

Αυτή η διαδικασία δείχνει ότι ένα πεπερασμένο εμβαδόν είναι δυνατό να κατατμηθεί σε άπειρα κομμάτια. Στην περίπτωσή μας το εμβαδόν μειώνεται στο μισό, βήμα-βήμα. Είναι επομένως σαφές ότι ένα άπειρο άθροισμα θετικών στοιχείων μπορεί να έχει πεπερασμένη τιμή.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\ \dots$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}=\ \dots$$

- Έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία ο αριθμός 2048 για τον πίνακα; Η απάντηση είναι «ναι». Το 2048 είναι δύναμη του 2, αφού ισχύει ότι 2048 = 2*2*2*2*2*2*2*2*2*2*2 = 2^{11}. Βέβαια ο Eugen Jost δεν θα μπορούσε να σχεδιάσει άπειρο αριθμό διχοτομήσεων. Αν μετρήσουμε τα τρίγωνα που έχουν διχοτομηθεί στον πίνακα, θα βρούμε ότι είναι 11.

- Δεν έχουν όλα τα άπειρα αθροίσματα πεπερασμένη τιμή, ακόμα κι αν τα στοιχεία του αθροίσματος μικραίνουν ολοένα και περισσότερο. Εξετάζουμε το άθροισμα των αντίστροφων των θετικών ακεραίων

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ \dots$$

Για να δείξουμε ότι αυτό το άθροισμα πλησιάζει το άπειρο, κάνουμε ένα είδος ομαδοποίησης:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ \ldots$$

Μετά αντικαθιστούμε κάθε όρο με έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο αυτού, π.χ.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \text{ και } \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\text{ , κτλ.}$$

Το νέο άθροισμα είναι μικρότερο από το αρχικό και παρατηρούμε ότι οι αριθμοί-αντικαταστάτες συγκλίνουν προς το άπειρο:

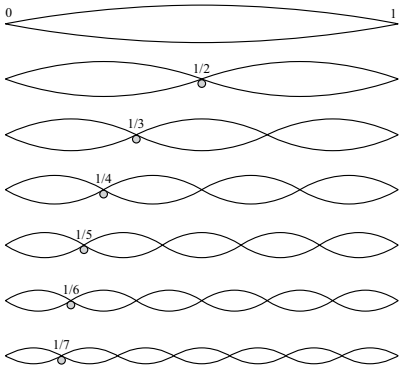
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ \ldots$$

Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των αντίστροφων των θετικών ακεραίων είναι επίσης άπειρο.

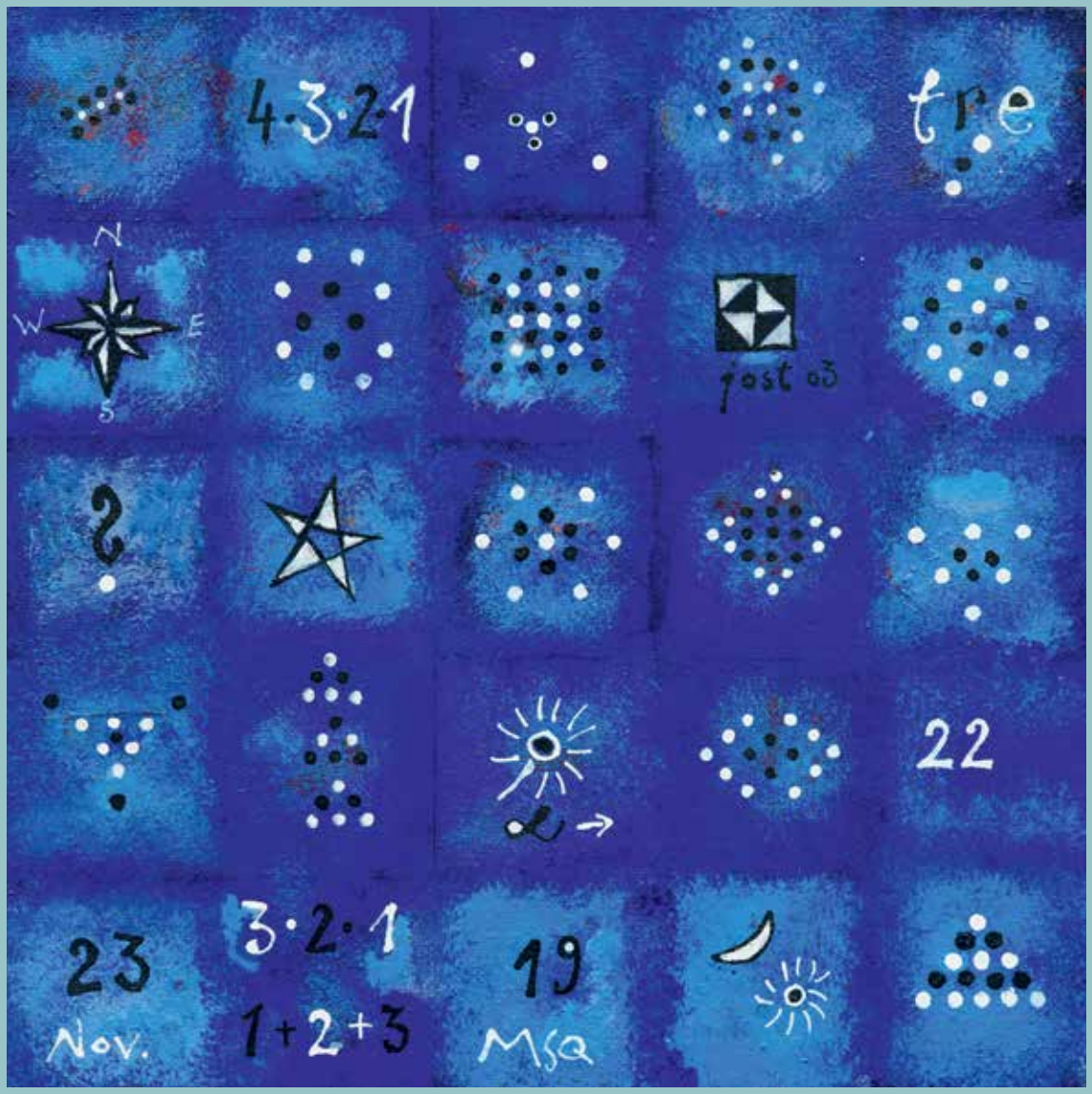
► Στα μαθηματικά η παραπάνω άπειρη σειρά ονομάζεται *αρμονική* σειρά.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ \ldots$$

Η ονομασία προέρχεται από την έννοια των αρμονικών ή της αρμονίας στη μουσική: τα μήκη κύματος των αρμονικών μιας δονούμενης χορδής $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ... (αναπαριστώμενα από ημιτονοειδή κύματα) προέρχονται από το βασικό μήκος κύματος της χορδής. Κάθε όρος της σειράς (δηλαδή οι υψηλότερες αρμονικές) μετά την πρώτη είναι ο «αρμονικός μέσος» των γειτονικών όρων.



Είναι ένα είδος μαγείας


4·3·2·1
tre
N
W
E
S
post 03
2
22
23
Nov.
3·2·1
1+2+3
19
Msq

Είναι ένα είδος μαγείας

- Στον καλλιτέχνη αρέσει να παίζει με τετράγωνα πλέγματα. Ο πίνακάς του με το μπλε τετράγωνο βασίζεται στην ιδέα ενός μαγικού τετραγώνου. Η τάξη ενός τέτοιου τετραγώνου ορίζεται από τον αριθμό των γραμμών ή των στηλών του. Για παράδειγμα, το μπλε μαγικό τετράγωνο έχει τάξη 5, επειδή έχει 5 γραμμές.

- Ένα μαγικό τετράγωνο n τάξης συνήθως αποτελείται από τους θετικούς ακέραιους 1, 2, 3, ... , n^2. Η μαγεία ενός μαγικού τετραγώνου έγκειται στην ειδική διάταξη αυτών των n^2 αριθμών στο τετράγωνο πλέγμα: το άθροισμα των n αριθμών σε κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε διαγώνιο είναι ίδιο. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται «η μαγική σταθερά».

- Πώς υπολογίζουμε τη μαγική σταθερά ενός μαγικού τετραγώνου n τάξης; Πρέπει να προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., n^2. Επειδή σε καθεμία από τις n γραμμές το άθροισμα πρέπει να είναι ίσο, πρέπει να διαιρέσουμε το αποτέλεσμά μας με το n. Ως μαγική σταθερά προκύπτει τελικά το $\frac{n\,(n^2+1)}{2}$.

- Στο μπλε μαγικό τετράγωνο ο καλλιτέχνης έχει αντικαταστήσει σχεδόν όλους τους αριθμούς με σχέδια με κουκκίδες και σύμβολα. Η μαγική σταθερά 65 ενός μαγικού τετραγώνου 5x5 βοηθά να βρούμε τους «κρυμμένους» αριθμούς.

- Οι αριθμοί διάφορων μαγικών τετραγώνων n x n εξακολουθούν να αποτελούν άλυτο πρόβλημα των μαθηματικών. Ξέρουμε το αποτέλεσμα μόνο για όταν n = 3, 4, 5. Υπάρχει 1 τετράγωνο 3ης τάξης, 880 τετράγωνα 4ης τάξης και 275.305.224 τετράγωνα 5ης τάξης (χωρίς να υπολογίζουμε τις περιστροφές και τις ανακλάσεις). Για το n = 6 υπάρχει μια εκτίμηση, ένας αριθμός μεγαλύτερος του 10^{19}.

- Τα μαγικά τετράγωνα κινούσαν την περιέργεια των ανθρώπων εδώ και αιώνες. Πράγματι, η παλαιότερη καταγραφή της εμφάνισης μαγικού τετραγώνου είναι περίπου στο 2200 π.Χ. στην Κίνα. Ονομαζόταν *lo-shu*. Σύμφωνα με τον θρύλο, αυτό το μαγικό τετράγωνο 3 επί 3 το αντίκρισε για πρώτη φορά ο Αυτοκράτορας Yu στην πλάτη μιας ιερής χελώνας στις όχθες του Κίτρινου Ποταμού.
  Εδώ βλέπουμε το τετράγωνο lo-shu σε μια απόδοση που περιλαμβάνει τους γνωστούς μας αραβικούς αριθμούς:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

- Το 1531 ο Agrippa of Nettesheim (1486 - 1535) δημοσίευσε το *De Occulta Philosophia (Απόκρυφη Φιλοσοφία)*, ένα χειρόγραφο απόκρυφων πεποιθήσεων και πρακτικών. Σε αυτό εξηγούσε αναλυτικά τις μαγικές ιδιότητες επτά μαγικών τετραγώνων τάξεων 3 έως 9, καθένα από τα οποία σχετιζόταν και με έναν πλανήτη. Για παράδειγμα, το τετράγωνο 5x5 ήταν αφιερωμένο στον Άρη.

- Το τετράγωνο του Άρη βοηθά στη μείωση των παραπόνων για προβλήματα της χολής. Αυτό ισχυρίζεται ο αρκετά γνωστός σύγχρονος του Agrippa, γιατρός Paracelsus (1493 - 1541). Ο ίδιος αποδίδει επίσης θεραπευτικές ιδιότητες σε άλλα μαγικά τετράγωνα.

- Το μαγικό τετράγωνο της 4ης τάξης σχετίζεται με τον πλανήτη Δία και το χρησιμοποιούσαν ως φυλαχτό για την καταπολέμηση της μελαγχολίας. Αυτό μπορεί να εξηγεί γιατί ο Albrecht Durer (1471 - 1528) επέλεξε ένα μαγικό τετράγωνο της 4ης τάξης για το διάσημο εγχάρακτο έργο του *Melencolia I*. Πρόκειται για ένα πραγματικά εξαιρετικό μαγικό τετράγωνο, πιθανόν το πρώτο που αποτυπώνεται σε ευρωπαϊκή τέχνη.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

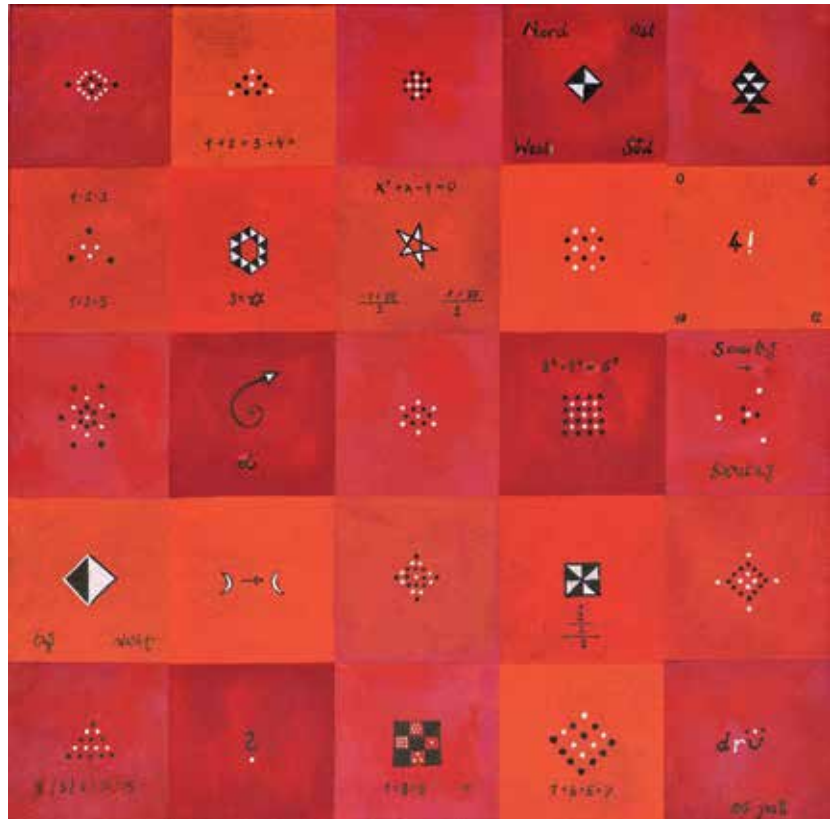
Η μαγική σταθερά 34 συναντάται στις γραμμές, τις στήλες, τις διαγωνίους, σε καθένα από τα τετράπλευρα, τα κεντρικά τέσσερα τετράγωνα, τα γωνιακά τετράγωνα, κ.λπ. Προσπαθήστε να βρείτε όλες αυτές τις πιθανότητες! Οι δύο αριθμοί στη μέση της κάτω γραμμής δίνουν το έτος δημιουργίας του έργου: 1514. Οι αριθμοί 4 και 1 σε κάθε πλευρά του έτους αντιστοιχούν στα γράμματα *D* και *A* αντίστοιχα, που είναι τα αρχικά του καλλιτέχνη.

- Ολοκληρώνουμε το ταξίδι μας στα μαγικά τετράγωνα με μια επίσκεψη σε μια ιδιαίτερη παιδική χαρά. Ο καλλιτέχνης μάς καλεί να περιγράψουμε τα σχέδια και τα σύμβολα στα παρακάτω τετράγωνα της 5ης τάξης. Ελπίζει ότι θα έχουμε τη χαρά την ανακάλυψης όλων των κρυμμένων αριθμών.

Μαγικά τετράγωνα

Lo Shu

Μαγικό τετράγωνο



V.G.Z.: παρελθόν - παρόν - μέλλον

100 τετράγωνα

Ο *Eugen Jost* γεννήθηκε και μεγάλωσε στη Ζυρίχη. Γι' αυτόν, το παιχνίδι με τους αριθμούς, τα σύμβολα και τα σχέδια είναι πολύ σημαντικό. Γι' αυτό ονομάζει τους καμβάδες του «παιδικές χαρές». Τον ενδιαφέρουν τα μαθηματικά, η γεωμετρία, και η ιστορία τους. Ο Ευκλείδης έγραψε: *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν, γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές* (*Σημείο είναι εκείνο που δεν έχει κανένα μέρος, γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος*). Παρά τον ισχυρισμό αυτόν, ο Αρχιμήδης σχεδίασε τους κύκλους του με φαρδιές γραμμές στην άμμο των Συρακουσών με το δάχτυλό του. Σήμερα είναι πιο εύκολο να εκπληρωθούν τα λεγόμενα του Ευκλείδη: με λίγα κλικ του ποντικιού μπορείτε να μειώσετε το πλάτος μιας γραμμής στο ελάχιστο. Την τελευταία δεκαετία ο Jost έχει δημιουργήσει τους περισσότερους πίνακες και τα σχέδιά του με ειδικό λογισμικό εγκατεστημένο στον υπολογιστή του. Όλες οι εικόνες στην παρούσα έκθεση, ωστόσο, είναι με ακρυλικό σε καμβά.

Οι εικόνες και τα σχέδια του Jost περιέχονται σε πολλά βιβλία, όπως τα:

- Alles ist Zahl (μαζί με τον Peter Baptist)
- Alles ist Zahl - Mathematik andersARTig (μαζί με τον Peter Baptist και τον Carsten Miller)
- Beautiful Geometry (μαζί με τον Eli Maor)

Αν έχετε απορίες σχετικά με εικόνες ή εκθέσεις, μη διστάσετε να επικοινωνήσετε με τον Eugen Jost eugenjost@bluewin.ch

Αυτήν τη στιγμή ο *Peter Baptist* είναι ο Πρόεδρος του Center for Mobile Learning with Digital Technology (Κέντρο μάθησης μέσω κινητών συσκευών και ψηφιακής τεχνολογίας) στο Πανεπιστήμιο του Μπαϊρόιτ (Γερμανία). Εκεί ήταν επικεφαλής των μαθηματικών και της μαθηματικής παιδείας έως το 2013. Πριν πάει στο Μπαϊρόιτ, είχε διδάξει στα Πανεπιστήμια της Δρέσδης και του Ερλάνγκεν. Η ακαδημαϊκή του καριέρα ξεκίνησε στο Πανεπιστήμιο του Βούρτζμπουργκ. Η συνεργασία του με τον Eugen Jost ξεκίνησε το 2007 με αφορμή το έτος μαθηματικών στη Γερμανία το 2008.

Υποστηρίζεται από το ευρωπαϊκό έργο
CREATIONS http://creations-project.eu/

Υποστηρίζεται από το ευρωπαϊκό έργο
CREATIONS http://creations-project.eu/

2018 Έτος Μαθηματικών
100 χρόνια
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

UNIVERSITÄT BAYREUTH

ΑΙΕΝ ΑΡΙΣΤΕΥΕΙΝ
ΕΛΛΗΝΟΓΕΡΜΑΝΙΚΗ ΑΓΩΓΗ